

SÉRIE A, N° 604.

N° D'ORDRE :

1336

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. L. DUNOYER,

Agrégé de l'Université, préparateur au Collège de France.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDES SUR LES COMPAS DE MARINE ET LEURS MÉTHODES
DE COMPENSATION. — UN NOUVEAU COMPAS ÉLECTRO-
MAGNÉTIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 31 mars 1909, devant la Commission d'Examen.

MM. G. LIPPMANN, *Président.*
WALLERANT, *Examineurs.*
COTTON,

PARIS,

GAUTHIER-VILIARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

SÉRIE A, N° 604.

N° D'ORDRE :

1336

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. L. DUNOYER,

Agrégé de l'Université, préparateur au Collège de France.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDES SUR LES COMPAS DE MARINE ET LEURS MÉTHODES
DE COMPENSATION. — UN NOUVEAU COMPAS ÉLECTRO-
MAGNÉTIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 31 mars 1909, devant la Commission d'Examen.



MM. G. LIPPMANN, *Président.*
WALLERANT, } *Examineurs.*
COTTON, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen.....	P. APPELL, Professeur	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires.	L. TROOST.	
	CH. WOLF.	
	J. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. compar.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KENIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
Professeurs	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Applicat. de l'analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie.
	G. BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	CAULLERY.....	Zool. (Évolution des êtres organisés).
	G. URBAIN.....	Chimie.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comp.
	PUISEUX.....	Mécanique et astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	HADAMARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
Professeurs adjoints...	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	G. PRUVOT.....	Anatomie comparée.
Secrétaire	A. GUILLET.	

A LA MÉMOIRE
DE
MON PÈRE.

Hommage de vénération filiale.

A

MONSIEUR LE CAPITAINE DE FRÉGATE E. GUYOU,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

Hommage respectueux.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDES SUR LES COMPAS DE MARINE ET LEURS MÉTHODES DE COMPENSATION.

UN NOUVEAU COMPAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

AVANT-PROPOS.

1. L'origine de ce travail se trouve dans des conversations que j'eus avec un de mes frères, lieutenant de vaisseau, au sujet des compas dont il était chargé, à cette époque, sur le cuirassé *Brennus*. C'est par lui que j'ai été initié, sans être marin, aux difficultés que soulèvent, pour l'emploi des compas Thomson, les nécessités militaires modernes des constructions navales. Convaincu qu'il y aurait un intérêt pratique considérable à trouver une méthode permettant de connaître, dans les blockhaus cuirassés où il est impossible de placer un compas Thomson, la direction du nord magnétique, et voyant d'autre part que les divers essais de transmission mécanique, optique ou électrique des indications d'une rose condui-

saient à des solutions difficilement praticables, je voulus essayer du principe de l'inducteur terrestre de Weber. Après avoir construit, au laboratoire du Collège de France, un appareil rustique, il me fut accordé, sur la demande de M. Mascart, d'être embarqué pour les essais de principe de cet appareil sur le cuirassé *Gaulois* pendant les grandes manœuvres navales de 1906. J'y retrouvai les conseils et l'assistance continue de mon frère. C'est à lui que doivent aller mes premiers et plus affectueux remerciements.

Grâce à l'intérêt que voulurent bien prendre à ces essais M. le capitaine de vaisseau de la Croix de Castries, commandant le *Gaulois*; M. le lieutenant de vaisseau Sémichon, chargé du Rapport officiel; M. le capitaine de frégate de Cacqueray, chef du service des instruments nautiques, chargé de l'examen de ce Rapport, j'eus la confiance qu'une mise au point de mon appareil serait bien accueillie. Une judicieuse remarque de M. Hortet, alors enseigne sur le *Gaulois*, m'avait suggéré l'idée d'un récepteur à deux galvanomètres croisés donnant directement le cap magnétique et la grandeur du champ. C'est là un point capital, à cause des facilités considérables que donne cette disposition pour la *compensation* rapide des influences perturbatrices produites par les masses de fer ou d'acier du navire.

Un appareil complet fut alors construit par la maison Carpentier, à laquelle je dois un très sincère remerciement, particulièrement en la personne de M. Joly, pour les soins qui furent donnés à cette construction. En l'étudiant, je reconnus que deux modes de compensation étaient possibles, l'un et l'autre incomparablement plus rapides et d'une mise en œuvre plus simple que les procédés employés pour les compas magnétiques ⁽¹⁾.

(¹) *Comptes rendus*, décembre 1907.

Pour expérimenter le nouvel appareil et les nouvelles méthodes, M. de Cacqueray obtint encore pour moi l'autorisation d'embarquer sur le cuirassé *Patrie*. J'y reçus l'hospitalité la plus obligeante, et c'est un agréable devoir pour moi d'en remercier ici M. le vice-amiral Germinet, commandant en chef l'escadre de la Méditerranée, et M. le capitaine de vaisseau de la Croix de Castries. Pour les essais, je reçus l'aide la plus efficace de M. le lieutenant de vaisseau Le Gorrec, officier des montres et comme tel chargé des compas du bord, et de M. Cambon, enseigne de vaisseau torpilleur. A la suite de ces essais, l'appareil a été adopté par le Ministère de la Marine pour être soumis à l'épreuve du temps et sans exclusion pour cela, naturellement, les compas Thomson.

2. Cet appareil, que j'ai appelé *compas électromagnétique*, ne fait pas le seul objet de ce travail, qui se divise en trois Parties.

La première comprend un résumé succinct des méthodes d'emploi des compas et des méthodes de compensation. Cet exposé n'a évidemment pas pour but de remplacer les excellents Traités et les instructions pratiques sur la matière. Il est simplement destiné à mettre au courant de ce qu'on sait aujourd'hui de plus important et de plus sûr relativement au magnétisme du navire, et d'indiquer le principe des méthodes de compensation.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude d'un type de compas assez en faveur aujourd'hui, du moins dans certaines Marines, les *compas liquides*. On les examine à deux points de vue : on étudie d'abord la manière dont ils se comportent mécaniquement eu égard à la liaison visqueuse que le liquide établit entre la rose et le navire ; on examine ensuite leur compensation pour laquelle la grandeur de leur moment magnétique fait naître des avantages et des inconvénients spéciaux. Nous nous permettons de signaler, à ce point de vue, la théorie nou-

velle que nous donnons de l'action mutuelle du compas et des correcteurs de fer doux.

Enfin, la troisième Partie est consacrée à notre compas électromagnétique et à ses méthodes de compensation.

Sur aucun point, nous ne nous sommes proposé d'être complet et l'on ne trouvera pas dans notre travail une bibliographie étendue. On peut trouver de bons renseignements bibliographiques à la fin du récent Ouvrage de M. Corbara, lieutenant de vaisseau de la Marine italienne, *Trattato sul magnetismo delle navi in ferro et sulle bussole marine* (1907). C'est ainsi que nous n'avons donné aucun détail sur la mise en œuvre pratique des méthodes actuelles de compensation, décrit aucun type particulier de compas liquide, insisté sur aucun des systèmes proposés pour la transmission des indications du compas. Cela nous aurait entraîné trop loin. Notre but a été plutôt d'approfondir certaines questions, choisies parmi celles qui nous paraissent avoir actuellement le plus d'intérêt pratique.

Le nom de M. le capitaine de frégate Guyon, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, reviendra souvent au cours de ce travail. Il ne saurait en être autrement quand on parle de compas. La Marine française lui doit en particulier la forme si simple et si lumineuse sous laquelle il a mis la théorie de la compensation du compas Thomson, de la mise en service duquel elle lui est aussi redevable. Qu'il nous soit permis d'exprimer ici à M. le commandant Guyon notre profonde gratitude pour les encouragements et les précieux conseils qu'il nous a maintes fois donnés au cours de nos recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Historique.

1. On trouvera un abrégé très attrayant de l'histoire des compas dans le Tome III, consacré à la navigation, des *Popular Lectures and Adresses* de Lord Kelvin.

Les Chinois ont connu les propriétés d'orientation de la pierre d'aimant bien longtemps avant l'ère chrétienne, et l'empereur Hoang Ti paraît s'être servi de cette propriété pour diriger son armée à travers un brouillard épais vers l'an 2400 avant J.-C.

Chose curieuse : les Grecs et les Romains connaissaient les phénomènes magnétiques ordinaires d'attraction et de répulsion, mais ignoraient la propriété d'orientation que les aimants possèdent dans le champ terrestre.

C'est à l'intervalle compris entre le milieu du ix^e et le commencement du xii^e siècle qu'appartiennent les textes dont nous pouvons conclure à l'existence de compas de marine dans le nord de l'Europe. Au xiii^e siècle, ils étaient connus dans toute l'Europe.

Les propriétés essentielles du champ magnétique terrestre furent découvertes par Gilbert, médecin de la reine Élisabeth. Dans son Ouvrage, Gilbert décrit aussi les compas de Marine qu'on employait de son temps. Ils ne différaient par rien d'essentiel de ceux qui étaient encore en usage dans toutes les Marines quand Sir William Thomson, amené à étudier la question (1874), créa le compas qui porte son nom et où l'on retrouve la marque de son admirable ingéniosité. L'homme qui avait uni l'Ancien et le Nouveau Monde par le premier câble télégraphique contribuait puissamment par la création de

son compas à augmenter la sécurité de la navigation. 70 pour 100 peut-être des pertes de navires sont dues à des erreurs de compas.

2. Un des avantages du compas Thomson et non des moindres était de permettre la mise en œuvre rigoureuse et sûre d'une méthode de compensation des actions perturbatrices que les masses de fer distribuées dans le navire exercent sur le compas, méthode due aux travaux de Flinders (1805), de Barlow qui employa le premier des globes ou des cylindres de fer doux comme masses correctrices (1820), et surtout de Poisson ⁽¹⁾ qui posa les équations fondamentales de la théorie. La méthode de Poisson fut ensuite développée et perfectionnée par Sir George Airy ⁽²⁾ et par Archibald Smith ⁽³⁾; mais elle s'appliquait mal aux compas en usage, dont le moment magnétique trop grand et les aiguilles trop longues empêchaient que les hypothèses placées à la base de la théorie de Poisson fussent vérifiées suffisamment. Le compas Thomson formé de quelques aiguilles courtes et peu aimantées permit pour la première fois une compensation rigoureuse.

Ce compas réalisait en même temps d'une manière remarquable, par la légèreté de sa rose, d'un moment d'inertie assez grand cependant pour lui donner une longue période d'oscillation, les conditions de stabilité que doit remplir un compas pendant les mouvements de roulis et de tangage.

3. Au lieu de chercher la stabilité de la rose dans la petitesse de son moment magnétique, sa légèreté et la grandeur relative de son moment d'inertie, on a cherché cette stabilité dans une augmentation de l'amortissement de ses oscillations. La rose a été immergée dans un li-

⁽¹⁾ POISSON, *Mémoires de l'Institut*, t. V, 1824.

⁽²⁾ G. AIRY, *Philosophical Transactions*, 1839, 1865.

⁽³⁾ Archibald SMITH, *Manuel de l'Amirauté*, 1862.

quide. L'amortissement d'une rose Thomson qu'on plongerait dans un liquide serait beaucoup trop grand. On a donc été conduit à augmenter le moment magnétique, ce qui peut avoir des avantages évidents et des inconvénients plus cachés; c'est ce que nous verrons dans la deuxième Partie.

II. — Emploi des compas

4. Nous allons d'abord passer rapidement en revue les manières diverses dont on utilise à bord les indications du compas et nous nous rendrons compte ainsi de la nécessité pratique où l'on est de le compenser le mieux possible. Nous examinerons ensuite de quelles méthodes on dispose pour effectuer la compensation avec les compas magnétiques et dans quelles conditions il serait désirable que cette compensation pût toujours être faite et contrôlée.

5. *Description sommaire.* — Sous sa forme actuelle, le compas de marine est un équipage aimanté solidaire d'une rose, laquelle est constituée le plus souvent par une feuille de papier circulaire qui porte une rose des vents et une graduation en degrés, ce qui est plus conforme à la pratique de la navigation à vapeur; la graduation va généralement de 0° à 90° dans l'intervalle du nord à l'est de la rose, de 90° à 0° de l'est au sud, de 0° à 90° du sud à l'ouest et de 90° à 0° de l'ouest au nord; une longue habitude a rendu ce mode de graduation, qui a sans doute ses avantages, presque obligatoire.

Tout l'ensemble est monté au moyen d'une chape en agate, sur un pivot aussi aigu et dur que possible (une pointe d'osmium d'iridium dans le compas Thomson); ce pivot se trouve au centre d'une cuvette en laiton dont la paroi verticale porte un trait situé dans le plan de symétrie longitudinale du navire, ou du moins tel que ce plan soit parallèle au plan passant par le trait et la pointe du

pivot, dans le cas où le compas n'est pas placé dans l'axe du navire; ce trait est ce qu'on appelle la *ligne de foi*. Quand le navire évolue, ce trait défile devant la graduation de la rose, dont l'orientation doit rester fixe; la lecture de la division qui se trouve devant le trait donne le *cap au compas*, c'est-à-dire l'angle que le champ magnétique au centre du compas fait avec l'axe du navire; ce cap est toujours lu à partir du Nord dans le demi-horizon Est-Nord-Ouest et à partir du Sud dans le demi-horizon Est-Sud-Ouest; ainsi les caps intercardinaux sont N 45 E, S 45 E, S 45 O, N 45 O.

Le compas est employé comme *compas de route* ou comme *compas de relèvement*; nous verrons encore que la manière spéciale dont on l'utilise dans les évolutions rend sa compensation nécessaire, et qu'on ne peut se contenter d'un simple Tableau dans lequel on aurait inscrit les erreurs qu'il donne à chaque cap.

6. *Compas de route*. — C'est celui qui est placé sous les yeux de l'homme de barre pour *tenir* la route qui lui est prescrite.

Chaque jour, on détermine le *point* du navire, par la mesure astronomique de la longitude et de la latitude, si du moins l'état du ciel permet cette importante opération. Sachant le point où l'on est et celui où l'on veut aller, on connaît l'angle qu'à chaque instant la route du navire devra faire avec le méridien géographique et par suite, d'après les Cartes d'égale déclinaison, avec le méridien magnétique; c'est le compas de route qui permet de maintenir constamment le navire sur sa route. Or, le magnétisme terrestre produit dans les fers doux une induction variable avec la latitude. Comme on le verra plus loin, l'induction due à la composante horizontale produit les mêmes déviations pour toutes les latitudes. Au contraire, le magnétisme induit dans les fers doux verticaux rend évidemment ces fers doux équivalents à des aimants

permanents pour un point donné du globe, mais de moment magnétique variable d'un point à l'autre. Si le compas n'est pas compensé, on voit de suite l'erreur qui pourra résulter de cette induction verticale dans une navigation au cours de laquelle la latitude magnétique variera beaucoup.

De plus, si le compas n'est pas compensé, le couple qui le maintient dans sa position d'équilibre est presque nul à certains caps; ce couple devient donc de l'ordre du couple de frottement de la chape sur le pivot; si le navire fait une embardée à droite ou à gauche de sa route (par grosse mer surtout, c'est impossible à éviter), le compas, légèrement entraîné, n'indique ce mouvement qu'avec un certain retard; on ne peut donc remettre le navire dans sa route en agissant sur le gouvernail que lorsque l'embardée a déjà pris une assez grande amplitude et devient difficile à maîtriser; il n'est pas moins difficile d'empêcher qu'elle ne soit suivie d'une autre en sens inverse. Ces embardées successives sont dangereuses dans les passages où la navigation est difficile, gênantes et dangereuses aussi dans la navigation en escadre; elles créent enfin sur la direction moyenne suivie réellement par le navire une incertitude fâcheuse qui se traduit, à l'approche des côtes, par un danger, au large, par une perte de temps et d'argent.

7. *Compas de relèvement.* — Ces remarques s'appliquent aussi à l'emploi d'un compas de relèvement. Ce compas est muni d'une alidade qui se déplace au-dessus de la rose et qui permet de viser un point d'une côte reconnu sur la Carte ou une étoile dont la position est connue; on mesure ainsi l'angle du méridien magnétique (si le compas est compensé) avec la direction qui joint le navire à ce point; deux déterminations de ce genre faites sur deux points géographiquement connus permettent évidemment de fixer la position du navire d'une manière précise et rapide, ce qui est indispensable à l'ap-

proche d'une côte. En général, un compas de route ne peut pas servir de compas de relèvement, parce que du point où l'on gouverne, surtout si c'est le blockhaus, on ne voit pas l'horizon en plaçant l'œil au niveau du compas.

8. Enfin, pendant les *évolutions* d'une escadre, un compas non compensé donnerait des résultats qui seraient inadmissibles si l'on ne connaissait le Tableau des déviations, mais qui resteraient encore d'un emploi extrêmement incommode si l'on possédait ce Tableau. En effet, suivant le cap initial de l'évolution, il faudrait faire tourner le navire par rapport à la rose, tantôt de 7° ou 8° , par exemple, et tantôt de 40° à 45° pour une même embardée réelle de 20° . De plus, dans les évolutions de précision qu'exige la tactique moderne et la manœuvre des immenses paquebots que l'on construit maintenant, il faut que chaque commandant connaisse à quel degré il en est de son mouvement pour pouvoir régler en conséquence la barre et les hélices. Pour que le compas fournisse à tout instant l'indication qu'on lui demande, il faudrait que la rose ne fût en aucune manière entraînée dans le mouvement de rotation du navire. Or elle l'est toujours un peu ⁽¹⁾, mais l'inconvénient prendrait des proportions inadmissibles au passage par les caps où la force directrice serait minima et où le couple directeur deviendrait, par conséquent, du même ordre que le couple de frottement du pivot.

9. On vient de voir les usages courants du compas ; mais il est aussi appelé à servir pour l'établissement des Cartes magnétiques du globe. Les explorations magnétiques que ces Cartes nécessitent devraient être faites, évidemment, sur des navires en bois. Mais, outre qu'il est difficile de supprimer complètement le fer de la construction d'un navire, il n'est jamais arrivé en fait, croyons-

(1) Voir plus loin, Chap. II.

nous, qu'on ait construit des navires spéciaux dans ce but. L'une des dernières missions magnétiques de ce genre a eu lieu dans l'Atlantique, en 1895; M. le lieutenant de vaisseau Schwerer ⁽¹⁾ en était chargé sur le *Dubourdieu*; ce navire était un croiseur en fer et en acier; les observations de déclinaison, d'inclinaison et de force totale devaient donc subir des corrections importantes.

La méthode de correction imaginée à cette occasion par M. E. Guyou ⁽¹⁾ est fondée, comme les principes de la compensation, sur les équations de Poisson dont nous allons maintenant parler.

III. — Principes de la compensation.

10. *Équations de Poisson.* — Soient O le centre du compas, V le potentiel du champ terrestre en ce point et Ω le potentiel dû aux masses de fer du navire. On suppose que le compas est assez éloigné de toutes ces masses pour que l'induction que peut produire le champ qu'il crée soit négligeable. Le compas ne fait donc qu'indiquer la direction du champ qui résulte de la superposition des champs auxquels correspondent les potentiels V et Ω ; ce champ dépend du potentiel U,

$$U = V + \Omega.$$

Soient trois axes formant un trièdre trirectangle T, Ox dirigé vers l'avant, Oy vers tribord, Oz vers la quille. Soient (x, y, z) un point du navire, à la distance r de l'origine; A, B, C les composantes de l'aimantation au point (x, y, z) . On a

$$\Omega = \iiint \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

⁽¹⁾ Lieutenant de vaisseau SCHWERER, *Observations magnétiques en mer à bord du croiseur le Dubourdieu* (*Annales hydrographiques*, 1906). — Capitaine de frégate E. GUYOU, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, *Méthode de réduction des observations* (*Id.*).

l'intégrale étant étendue à toute la masse du navire. Si κ est la susceptibilité magnétique au point (x, y, z) , on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} A &= -\kappa \frac{\partial U}{\partial x} = -\kappa \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right), \\ B &= -\kappa \frac{\partial U}{\partial y} = -\kappa \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \\ C &= -\kappa \frac{\partial U}{\partial z} = -\kappa \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Les fers du navire sont de composition extrêmement variable, toujours susceptibles cependant de subir l'induction terrestre, depuis les aciers les plus durs jusqu'à des fers doux; étant donnée l'existence bien connue de la force coercitive, il est clair que, si l'intensité du champ terrestre, de composantes X, Y, Z , tendait vers zéro, le navire pris dans son ensemble ne deviendrait pas magnétiquement neutre. Soit ω la valeur limite que prendrait au point (x, y, z) le potentiel Ω ; nous poserons

$$\Omega = \omega + (\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3 Z) + (\omega'_{11} X^2 + \omega'_{12} XY + \dots) + \dots$$

Pour des valeurs suffisamment petites de X, Y, Z , l'ensemble des termes qui suivent le second devient moindre que telle fraction, si petite soit-elle, de la somme des deux premiers. On admet que, pour toutes les valeurs que peut prendre l'intensité du champ à la surface de la Terre, l'ensemble des termes qui suivent le second est négligeable. L'accord des résultats que cette hypothèse permet d'obtenir avec l'observation, eu égard à la précision que peuvent atteindre les mesures, doit confirmer ou infirmer sa légitimité.

On a alors

$$\begin{aligned} A &= -\kappa \left(1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right) X - \kappa \frac{\partial \omega_2}{\partial x} Y - \kappa \frac{\partial \omega_3}{\partial x} Z - \kappa \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ B &= -\kappa \frac{\partial \omega_1}{\partial y} X - \kappa \left(1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) Y - \kappa \frac{\partial \omega_3}{\partial y} Z - \kappa \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ C &= -\kappa \frac{\partial \omega_1}{\partial z} X - \kappa \frac{\partial \omega_2}{\partial z} Y - \kappa \left(1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) Z - \kappa \frac{\partial \omega}{\partial z}; \end{aligned}$$

X, Y, Z étant indépendantes de x, y, z , le potentiel Ω sera bien évidemment comme A, B, C une fonction linéaire de X, Y, Z avec un terme indépendant. Les composantes X', Y', Z' du champ au point O auront donc pour expressions

$$X' = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 = (1 + a)X + bY + cZ + P,$$

$$Y' = - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 = dX + (1 + e)Y + fZ + Q,$$

$$Z' = - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = gX + hY + (1 + k)Z + R.$$

Telles sont les équations données par Poisson pour servir de base à la théorie des déviations du compas.

Les termes P, Q, R qui ne dépendent pas du champ terrestre, mais seulement de la distribution du fer dans le navire et par rapport au compas, jouent évidemment le même rôle que les composantes d'un champ qui résulterait d'une aimantation propre du navire. On les considère donc comme les composantes de l'*aimantation* dite *permanente* du navire. En réalité, cette permanence est toute relative et cette aimantation varie avec le temps sous l'influence de causes multiples encore mal élucidées.

Les autres termes correspondent au champ terrestre et à ce qu'on appelle les *fers doux* du navire ⁽¹⁾.

11. Si l'on considère les neuf coefficients $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ et les composantes P, Q, R comme des quantités données arbitrairement, les équations de Poisson expriment la correspondance linéaire la plus générale entre deux vecteurs, le champ terrestre et le champ au centre du compas. Posées *a priori*, ces équations ne sont

(1) La distinction qu'on fait souvent *a priori* entre les fers doux et les fers durs dans le navire n'est pas nécessaire, comme on le voit, à la formation des équations de Poisson; elle ne correspond pas, d'ailleurs, à la nature des choses, l'induction terrestre se faisant sentir dans les aciers les plus durs du navire, de même que la force coercitive dans ce qu'on y considère comme fers doux.

cependant pas trop générales, comme le fait remarquer Maxwell, car il est aisé de faire varier arbitrairement chacun des coefficients sans faire varier les autres. En effet, une longue tige de fer doux placée suivant Ox , avec une extrémité à la distance x de O et l'autre extrémité assez loin pour que son action en O soit négligeable, produit en ce point une composante $\frac{SxX}{x^2}$, en appelant S sa section; le coefficient $\frac{Sx}{x^2}$, analogue à a , peut évidemment prendre toutes les valeurs possibles. On verra ainsi que l'on peut donner aux neuf coefficients de X , Y , Z telles valeurs qu'on veut avec neuf tiges de fer doux dirigées suivant Ox , Oy et Oz et disposées par groupes de trois rayonnant d'un point de Ox , d'un point de Oy et d'un point de Oz . Un aimant permanent permet aussi, très évidemment, de faire varier arbitrairement P , Q , R .

Avec un aimant (ou trois aimants placés suivant Ox , Oy , Oz) et neuf tiges de fer doux, il est par conséquent possible de faire en sorte qu'on ait

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z.$$

La compensation est donc possible.

Quand elle est réalisée, le champ au centre du compas a la même intensité à tous les caps.

Inversement, si l'on dispose des masses de fer autour du compas, de manière que l'intensité du champ en son centre soit la même à tous les caps, la compensation sera effectuée à une erreur constante près.

En effet, les équations de Poisson expriment que le vecteur OM' qui représente le champ au centre du compas et le vecteur OM qui représente le champ terrestre se correspondent par une transformation linéaire. Si, en un lieu du globe, le navire évolue, avec tangage et roulis, le point M se déplace sur une sphère S de centre O et de rayon $\mathcal{H}$ égal à l'intensité totale du champ terrestre. Le

point M' se déplace alors évidemment sur un *ellipsoïde*; le centre de cet ellipsoïde a pour coordonnées P, Q, R .

Si le champ au centre du compas, qu'on appelle aussi *force directrice*, a la même intensité à tous les caps, cet ellipsoïde est une sphère S' de centre O et de rayon $\mathcal{H}'$. Ainsi donc, à la sphère S

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \mathcal{H}^2$$

correspond linéairement la sphère S'

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \mathcal{H}'^2,$$

et l'on aura

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

$$(1 + a)^2 + d^2 + g^2 = \frac{\mathcal{H}'^2}{\mathcal{H}^2}, \quad (1 + a)b + d(1 + e) + gh = 0,$$

$$b^2 + (1 + e)^2 + h^2 = \frac{\mathcal{H}'^2}{\mathcal{H}^2}, \quad bc + (1 + e)f + h(1 + k) = 0,$$

$$c^2 + f^2 + (1 + k)^2 = \frac{\mathcal{H}'^2}{\mathcal{H}^2}, \quad c(1 + a) + fd + (1 + k)g = 0.$$

Ces équations expriment que les quantités

$$(1 + a) \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \quad d \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \quad g \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \quad \dots$$

sont les cosinus directeurs de trois directions issues de O et formant un trièdre trirectangle T' . Ce trièdre est fixe par rapport au trièdre T pour un état déterminé des fers du navire. Les équations

$$X'' = [(1 + a)X + bY + cZ + P] \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} X',$$

$$Y'' = [dX + (1 + e)Y + fZ + Q] \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} Y',$$

$$Z'' = [gX + hY + (1 + k)Z + R] \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} Z'$$

expriment que X'', Y'', Z'' sont les coordonnées du point M par rapport au trièdre T' , et que si, par une rotation con-

venable, on fait coïncider le trièdre T' avec le trièdre T , le point M , entraîné dans ce mouvement avec le trièdre T' , viendra se placer sur la droite OM' .

Les deux champs OM et OM' sont donc parallèles, à une rotation constante près.

Cette erreur constante est d'ailleurs extrêmement faible et pratiquement négligeable dans beaucoup de cas ; il est toujours facile de la corriger par un déplacement convenable de la ligne de foi.

C'est sur ce théorème qu'est fondée la compensation à l'aide du *défecteur*, imaginée par Lord Kelvin et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

12. *Analyse du champ directeur.* — Pour pouvoir effectuer la compensation avec des tiges de fer, il faudrait que, un navire étant donné, on pût mesurer expérimentalement les coefficients $a, b, c, \dots, P, Q, R$. Cela ne paraît pas pratiquement possible. Pour aller plus loin, on utilise une élégante interprétation géométrique des équations de Poisson due à M. le commandant Guyou (¹).

Remarquons d'abord que la composante Z' a pour effet d'incliner la rose autour d'un axe horizontal. Mais elle est équilibrée par le poids de la rose appliqué en son centre de gravité et l'inclinaison de la rose est tout à fait négligeable. Au point de vue de la compensation, on ne s'occupe donc que des deux premières équations de Poisson.

Supposons qu'en un lieu du globe le navire évolue en restant droit ; la valeur de Z restera constante. L'induction due à la composante verticale du champ terrestre, représentée dans les expressions de X' et Y' par les termes cZ, fZ , produira donc le même effet qu'une aimantation permanente du navire. Ainsi, il agit au centre du compas

(¹) E. GUYOU, *Description et usage des instruments nautiques*, 1889.

une force constante par rapport aux axes Ox et Oy ayant pour composantes

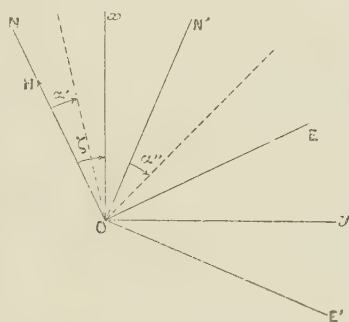
$$\begin{aligned} P + cZ & \text{ suivant } Ox, \\ Q + fZ & \text{ suivant } Oy. \end{aligned}$$

Le champ X', Y' est la somme de ce vecteur et du vecteur X'_1, Y'_1 :

$$\begin{aligned} X'_1 &= (1 + a)X + bY, \\ Y'_1 &= aX + (1 + e)Y. \end{aligned}$$

Soit ON la direction du Nord magnétique. Le cap magnétique du navire est l'angle NOx ou ζ (*fig. 1*) ; nous le

Fig. 1.



compterons de 0° à 360° à partir de ON positivement dans le sens des aiguilles d'une montre ; soit H l'intensité de la composante horizontale du champ terrestre.

On a

$$\begin{aligned} X'_1 &= H[(1 + a) \cos \zeta - b \sin \zeta], \\ Y'_1 &= H[a \cos \zeta - (1 + e) \sin \zeta]. \end{aligned}$$

Décomposons le vecteur X'_1, Y'_1 en deux composantes H' et H'' dirigées suivant deux directions faisant respectivement les angles α' et α'' avec ON et avec la direction ON' symétrique de ON par rapport à Ox ; nous aurons

$$\begin{aligned} X'_1 &= H' \cos(\zeta - \alpha') + H'' \cos(\zeta + \alpha''), \\ Y'_1 &= -H' \sin(\zeta - \alpha') + H'' \sin(\zeta + \alpha''). \end{aligned}$$

L'identification de ces expressions avec les précédentes donne

$$\begin{aligned} H' \cos \alpha' + H'' \cos \alpha'' &= (1 + a) H, \\ H' \sin \alpha' - H'' \sin \alpha'' &= -b H, \\ H' \sin \alpha' + H'' \sin \alpha'' &= d H, \\ -H' \cos \alpha' + H'' \cos \alpha'' &= -(1 + e) H, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} 2H' \sin \alpha' &= (d - b) H, & 2H'' \sin \alpha'' &= (b + d) H, \\ 2H' \cos \alpha' &= (2 + a + e) H, & 2H'' \cos \alpha'' &= (a - e) H, \\ H' &= \frac{H}{2} \sqrt{(d - b)^2 + (2 + a + e)^2}, & H'' &= \frac{H}{2} \sqrt{(b + d)^2 + (a - e)^2}, \\ \tan \alpha' &= \frac{d - b}{2 + a + e}, & \tan \alpha'' &= \frac{d + b}{a - e}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, H' et H'' sont fixes en grandeur et les angles α' et α'' constants, d'où il suit que :

Au centre du compas, le champ magnétique se compose de trois vecteurs constants en grandeur :

1° F_1 , fixe dans l'horizon, provenant du champ terrestre lui-même et d'une partie de l'induction magnétique dans le navire;

2° F_2 , fixe dans le navire, dû à son magnétisme permanent et à l'induction de la composante verticale du champ terrestre;

3° F_3 , dû exclusivement à l'induction, fixe par rapport à des axes rectangulaires qui coïncident avec ceux du navire quand il est au Nord et qui tournent dans l'horizon, en même sens que lui, d'un angle double.

En employant des notations devenues classiques, les composantes de ces trois vecteurs sont :

$$\text{Composante de } F_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{suivant ON} \dots \left(1 + \frac{a + e}{2} \right) H = \lambda H \\ \text{suivant OE} \dots \frac{d - b}{2} H = \lambda \lambda_0 H \end{array} \right.$$

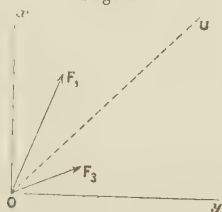
$$\begin{aligned} \text{Composante de } F_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{suivant } Ox \dots\dots P + eZ = \lambda \mathfrak{H} H \\ \text{suivant } Oy \dots\dots Q + fZ = \lambda \mathfrak{C} H \end{array} \right. \\ \text{Composante de } F_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{suivant } ON' \dots\dots \frac{a-e}{2} H = \lambda \mathfrak{D} H \\ \text{suivant } OE' \dots\dots \frac{d+b}{2} H = \lambda \mathfrak{E} H \end{array} \right. \end{aligned}$$

La quantité λ a une signification pratique importante : λH est l'intensité moyenne de la force directrice vers le Nord ; de la grandeur du nombre λ (toujours inférieur à 1) dépendent les qualités magnétiques de l'emplacement où le compas se trouve, au point de vue de la grandeur de la force directrice et par conséquent de la précision que l'on peut attendre des lectures faites au compas.

On peut voir facilement que, si le navire est incliné de l'angle i sur un bord, les résultats précédents restent vrais en négligeant les puissances de i supérieures à la première ; seulement les six coefficients précédents prennent des valeurs un peu différentes ⁽¹⁾.

13. *Plan de symétrie apparente des fers doux.* — Supposons le navire au Nord ; les axes ON , ON' et Ox coïncident (*fig. 2*). Soit OU la trace d'un plan pris dans

Fig. 2.



le navire et bissecteur de l'angle F_1OF_3 . Si le navire tourne de l'angle α , OU tourne de l'angle α , OF_3 de l'angle 2α , et par conséquent les directions de OF_1 et de OF_3 restent symétriques par rapport à OU . Si OU est di-

⁽¹⁾ Voir E. GUYOU, *Manuel des Instruments nautiques*, 1899, p. 105.

rigé vers le Nord, ces directions coïncident et le champ produit au centre du compas par le magnétisme terrestre et les fers doux est parallèle au champ terrestre. Aussi le plan OU a-t-il reçu de M. le commandant Guyou, qui en a signalé l'intérêt, le nom de *plan de symétrie apparente des fers doux* ⁽¹⁾.

Quand les fers doux sont symétriquement répartis, au point de vue magnétique, par rapport au plan de symétrie longitudinal du navire, et que le compas est placé dans l'axe, OU coïncide avec Ox; on voit immédiatement que l'on a alors

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathcal{C} = 0.$$

L'expérience montre qu'effectivement ces vecteurs sont alors très petits, en général; les valeurs que l'on trouve pour $\mathfrak{A}$ sont plutôt attribuables à des erreurs de placement de la ligne de foi; elles restent très petites, même lorsque $\mathcal{C}$ prend des valeurs notables; on est donc conduit à toujours négliger $\mathfrak{A}$, du moins quand il ne s'agit pas d'observations dans lesquelles il faut utiliser toute la précision que les instruments peuvent atteindre, comme celles qui servent à l'établissement des Cartes magnétiques.

14. *Correcteurs.* — Pour réaliser la compensation, il faudra produire au centre du compas, au moyen de masses de fer doux, un champ égal et de signe contraire à F_3 , et annuler de même le vecteur F_2 au moyen d'aimants et de barres de fer doux verticales, destinées à produire des coefficients c et f ; on pourrait bien en effet, en un lieu du globe, annuler $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{C}$ avec des aimants seulement, mais ces coefficients dépendent de Z et changent par suite quand le navire effectue un déplacement suffisant en latitude.

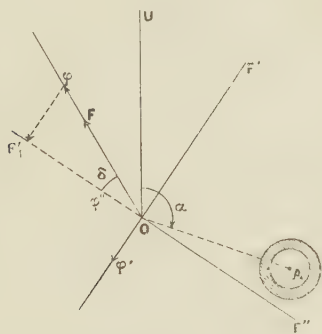
Les masses de fer compensatrices devront d'ailleurs,

(1) E. GUYOU, *Manuel des Instruments nautiques*, 1899, p. 89.

pour que la théorie précédente leur soit applicable, ne subir qu'une induction négligeable de la part du compas. C'est ce qui n'avait pas lieu pour les compas qui ont précédé le compas Thomson et c'est ce qui n'a pas lieu non plus pour les compas liquides, de grand moment magnétique.

1° *Compensation de F_3 .* — Pour compenser les fers doux, il est avantageux d'employer des sphères creuses dont l'épaisseur est au moins égale au $\frac{4}{10}$ du rayon. La déformation du champ qu'elles produisent autour d'elles dépend peu de leur susceptibilité magnétique, ce qui permet de dresser un Tableau des déviations qu'elles peuvent corriger sur un compas, suivant leur diamètre et leur position par rapport au compas, sans se préoccuper des qualités magnétiques du fer qui les constitue. On montre facilement ⁽¹⁾ qu'une sphère de rayon extérieur a , intérieur a' , de susceptibilité magnétique κ , dont le centre

Fig. 3.



est à la distance b du point O , sous l'azimut α par rapport à OU , et qui est soumise à l'induction d'un champ uni-

(1) Nous examinerons une démonstration dans la deuxième Partie, Chap. II.

forme OF (*fig.* 3), produit les composantes

$$\varphi = \frac{c_1 \alpha^3}{2 b^3} F$$

suivant OF,

$$\varphi' = \frac{3 c_1 \alpha^3}{2 b^3} F \cos 2 \alpha$$

suivant OF', symétrique de OF par rapport à OU,

$$\varphi'' = \frac{3 c_1 \alpha^3}{2 b^3} F \sin 2 \alpha$$

suivant OF'', faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec OF'.

Dans ces formules on a

$$c_1 = \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{1}{4\pi\kappa}}{1 + \frac{3^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4\pi\kappa}\right) \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha'}{a}\right)^3}}.$$

Si l'épaisseur de la sphère n'est pas inférieure à $\frac{a}{10}$, on voit que c_1 dépend peu de la susceptibilité magnétique du métal; c'est généralement de la fonte douce. Avec des sphères légères et peu encombrantes, on peut ainsi compenser des déviations considérables (20° par exemple avec des sphères de 30^{cm} de diamètre).

Le champ F qui induit la sphère est la somme géométrique des champs F_1, F_2, F_3 , en supposant que le champ soit uniforme dans une région suffisante, comprenant la sphère, du plan horizontal passant par le centre du compas. Le vecteur F_2 produit dans la sphère une induction constante qu'on corrige en même temps que le vecteur F_2 lui-même. Quand OU est au Nord, les vecteurs F_1 et F_3 sont aussi au Nord, d'après la définition même de OU; il faut alors que l'induction de ces vecteurs dans la sphère ne produise pas de déviation, c'est-à-dire que le vecteur dirigé suivant OF'' soit nul. Il faut donc que la ligne OA

soit perpendiculaire au plan de symétrie apparente des fers doux.

On emploie généralement les globes par paire en les plaçant symétriquement par rapport au centre du compas.

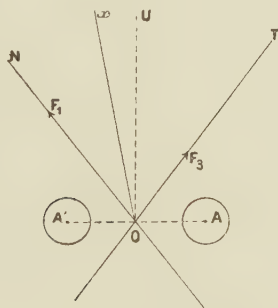
L'orientation à donner à la ligne des centres des compensateurs est connue si l'on connaît les coefficients $\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$. En effet, soit γ l'angle de Ox et de OU ; en se reportant à la figure 2 où l'on suppose OF_1 dirigé suivant Ox , puisque nous négligeons $\mathcal{A}$, on voit de suite qu'on a

$$\sin 2\gamma = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2}}, \quad \cos 2\gamma = \frac{\mathcal{O}}{\sqrt{\mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2}}.$$

Dans le cas où les fers doux sont symétriques par rapport au plan xOx , on a $\mathcal{C} = 0$; on place alors les compensateurs par le travers du compas.

Leur distance au compas est facile à déterminer.

Fig. 4.



En effet, les globes induits sous l'influence du champ F_1 (fig. 4) donnent deux composantes :

$$\begin{array}{ll} f_1 F_1 \text{ suivant } ON \text{ en posant } f_1 = \frac{c_1 a^3}{b^3}, \\ -f_3 F_1 \quad \text{ » } \quad OT \quad \text{ » } \quad f_3 = \frac{3c_1 a^2}{b^3}. \end{array}$$

Le champ F_3 donne, d'autre part, naissance aux vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 F_3 & \text{ suivant OT,} \\ -f_3 F_3 & \text{ » ON.} \end{aligned}$$

Le champ total suivant OT est donc

$$F_3 + f_1 F_3 - f_3 F_1,$$

et la compensation aura lieu si l'on a

$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{f_3}{1+f_1} \quad \text{ou} \quad \frac{f_3}{1+f_1} = \sqrt{\mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2}.$$

$\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$ connus permettront donc de calculer b en supposant a donné. Mais ce n'est pas ainsi qu'on procède. Si l'on se rapporte à la figure 3 dans laquelle on suppose

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

on voit que l'angle maximum δ_m , entre le champ uniforme OF et la résultante OF'_1 de ce champ et des champs créés par la sphère, est atteint quand l'angle $\varphi F'_1 O$ est droit; on a alors, en valeur absolue, en supposant qu'il y a deux sphères symétriques au lieu d'une,

$$\sin \delta_m = \frac{2\varphi'}{F + 2\varphi} = \frac{\frac{3c_1 a^3}{b^3}}{1 + \frac{c_1 a^3}{b^3}} = \frac{f_3}{1+f_1}.$$

Le quotient $\frac{f_3}{1+f_1}$ a reçu le nom de *puissance compensatrice* d'une paire de compensateurs. Si l'on a une Table donnant, pour un diamètre donné des globes, leur puissance compensatrice en fonction de leur distance au centre du compas, on connaîtra cette distance une fois connus $\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$.

La puissance compensatrice est évidemment suscep-

tible d'une mesure expérimentale sur laquelle nous n'insisterons pas.

La notion de puissance compensatrice a été introduite par M. le commandant Guyou, auquel l'analyse précédente est empruntée ⁽¹⁾.

2° *Compensation de F₂*. — Les composantes de F₂ sont, comme nous l'avons vu,

$$\lambda \mathfrak{H} = P + cZ,$$

$$\lambda \mathfrak{O}H = Q + fZ.$$

On constate aisément, sur les équations de Poisson, que, si les fers doux sont symétriques par rapport au plan de symétrie longitudinal xOz , on a

$$b = 0, \quad d = 0, \quad f = 0, \quad h = 0.$$

La compensation séparée des coefficients P , Q , c , f ne se faisant que pour le compas étalon situé dans l'axe, on a $f = 0$. Pour les autres compas, on se contente, en général, de compenser globalement $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{O}$.

Supposons que, λ ayant été déterminé, on détermine $\mathfrak{H}$ en plusieurs lieux du globe où H et l'inclinaison θ sont connues; si l'on construit une courbe en prenant $\mathfrak{H}$ en ordonnées et $\tan \theta = \frac{Z}{H}$ en abscisses, cette courbe est évidemment une droite. On pourra donc déterminer graphiquement P et c .

Connaissant c il sera facile, sans que nous entrions dans le détail, de déterminer, par le calcul ou par une expérience faite à terre en l'absence de toute autre cause perturbatrice, quelle longueur il faut donner à une barre de fer doux verticale, de diamètre donné, placée à une distance donnée du compas (sur l'avant si c est négatif, sur l'arrière si c est positif), son extrémité supérieure étant au niveau de la rose, pour qu'elle produise au centre de

(1) E. GUYOU, *Manuel des Instruments nautiques*, 1899, p. 93.

la rose un coefficient égal à $-c$. Cette barre est composée de rondelles de fer doux qu'on empile dans un tube en laiton; c'est ce qu'on appelle la *barre de Flinders*.

Il ne reste plus que l'aimantation permanente à compenser. On pourrait faire un étalonnage de la graduation sur laquelle on déplace les aimants compensateurs, les uns parallèles à Ox et les autres à Oy , pour produire des vecteurs P et Q donnés. Il est plus simple d'annuler la déviation, le cap étant au Nord magnétique, en plaçant convenablement des aimants transversaux, ce qui produit un vecteur Q , et de l'annuler encore, le cap étant à l'Est magnétique, avec des aimants longitudinaux qui produisent un vecteur P .

15. *Détermination de λ , $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$.* — Cette détermination est indispensable, on vient de le voir, pour la compensation complète. Si l'on se contentait d'une compensation locale de F_2 au moyen d'aimants placés comme il vient d'être dit à la fin du précédent paragraphe, il faudrait néanmoins pour le placement des globes connaître $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$; or, la détermination des six coefficients se fait en même temps, par celle des déviations du compas à un nombre suffisant de caps, cinq au moins.

En effet, en projetant sur ON la résultante H' des vecteurs F_1, F_2, F_3 et ces vecteurs eux-mêmes, on a

$$\frac{H'}{\lambda H} \cos \delta = 1 + \mathfrak{D} \cos 2\zeta - \mathfrak{E} \sin 2\zeta + \mathfrak{B} \cos \zeta - \mathfrak{C} \sin \zeta,$$

et, en faisant de même sur la direction perpendiculaire à la résultante H' ,

$$0 = -\sin \delta + \mathfrak{A} \cos \delta + \mathfrak{D} \sin (2\zeta - \delta) \\ + \mathfrak{E} \cos (2\zeta - \delta) + \mathfrak{B} \sin (\zeta - \delta) + \mathfrak{C} \cos (\zeta - \delta).$$

La connaissance des déviations correspondant à cinq caps différents, ou mieux de la courbe des déviations, permettra de calculer $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ au moyen de la seconde relation.

Pour déterminer $\frac{H'}{H}$ on se servira d'une petite boussole d'oscillation que l'on fera osciller à terre, puis à bord sous un cap ζ , en déterminant chaque fois sa période; la première formule donnera λ .

Dans la pratique, du reste, on remplace la seconde formule par le développement en série

$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' \\ + F \sin 3\zeta' + G \cos 3\zeta' + H \sin 4\zeta' + K \cos 4\zeta' + \dots$$

introduit par Archibald Smith et dans lequel ζ' désigne le cap au compas, c'est-à-dire l'angle de son axe magnétique avec l'axe du navire. On ne se sert que de la première ligne, les termes des lignes suivantes étant d'ordre supérieur au premier si l'on considère A, B, C, D, E comme des quantités petites du premier ordre. Tous les coefficients peuvent d'ailleurs s'exprimer en fonction des cinq premiers (¹), ainsi que les quantités $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$.

Le coefficient A est généralement négligeable (on a $\mathfrak{A} = \tan A$); l'ensemble

$$B \sin \zeta' + C \cos \zeta'$$

porte le nom de *déviatiou semi-circulaire*, et l'ensemble

$$D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta',$$

celui de *déviatiou quadrantale*; l'origine de ces appellations est évidente.

16. *Inconvénients de la méthode des relèvements. Conditions pratiques de compensation.* — Cette méthode est très complète et susceptible de fournir des résultats très précis. Mais elle a des inconvénients qui peuvent être graves.

D'abord elle est d'une mise en œuvre très longue et très laborieuse. Il faut, pour déterminer la courbe des dévia-

(¹) E. GUYOU, *Annales hydrographiques*, 1896.

tions, amener le navire à un certain nombre de caps et l'y maintenir pour être bien assuré de la position d'équilibre de la rose. Cette opération se fait soit à la mer en gouvernant avec beaucoup de soin pendant tout le temps que le navire doit rester au même cap, soit en rade en faisant tourner le navire, au moyen d'un remorqueur, autour d'un coffre dont l'ancre est mouillée au fond de la mer. A chaque cap il faut déterminer la déviation δ , ce qu'on fait en prenant un *relèvement* au compas d'un astre ou d'un objet géographiquement connu et suffisamment éloigné; soient O le centre du compas, L le repère éloigné; on connaît l'angle ρ de OL et du méridien magnétique, c'est-à-dire le relèvement magnétique de L; on vise L avec l'alidade centrée sur le compas; la ligne OL fait l'angle ρ' avec l'axe magnétique du compas; la déviation δ correspondant au cap au compas ζ' est

$$\delta = \rho - \rho',$$

et l'on a

$$\zeta = \zeta' + \delta.$$

L'ensemble des opérations demande au moins une journée. De plus, elle suppose connu le méridien magnétique et des points célestes ou géographiques observables au voisinage de l'horizon; elle est donc inapplicable par temps de brume.

Or il est extrêmement désirable, et même indispensable dans certains cas, de posséder une méthode de compensation *rapide et applicable quel que soit l'état du ciel*.

Ainsi, un transatlantique naviguant dans des parages brumeux, comme ceux qui avoisinent le banc de Terre-Neuve par exemple, a besoin d'avoir entière confiance dans son compas, surtout à l'approche de parages dangereux; une méthode qui permettrait, en modifiant la route le moins possible, de s'assurer que la compensation est toujours correcte rendrait donc de grands services en augmentant la sécurité de la navigation.

N'insistons pas sur ce cas spécial des navires qui reçoivent un chargement magnétique (minerai de fer, etc.) qu'il faut à chaque fois compenser; si, dans bien des cas, cette compensation est faite d'une manière insuffisante, c'est sans nul doute dans l'espoir de faire une économie de temps.

Pour la Marine de guerre, la nécessité d'une méthode rapide et toujours applicable est encore plus grande.

Un navire appelé subitement à prendre du service actif pourra bien n'avoir pas une journée à aller passer au coffre de régulation, d'autant plus que d'autres attendraient leur tour. Après un combat, il faut compter que le magnétisme du navire aura subi des modifications importantes par le fait des chocs violents, de l'échauffement de bien des pièces, de l'épuisement des soutes en munitions, de la disparition ou de la déformation de bien des parties du navire. Tout compas subsistant aura donc besoin d'être à nouveau compensé. Or les compas extérieurs à la cuirasse auront été détruits; et quand bien même, du reste, on ne serait pas arrêté par les questions du temps disponible et de visibilité de l'horizon, on ne pourrait pas songer à compenser directement par la méthode des relèvements un compas placé sous une cuirasse, ou dans le *poste central* ⁽¹⁾ par exemple, d'où l'horizon est invisible.

A défaut de compas subsistant à l'extérieur de la cuirasse après le combat, il faudrait donc, semble-t-il, en installer un sur le pont et l'étudier pour en transmettre ensuite les indications à la barre. Dans ces conditions, inutile de dire qu'en fait, il faudra se contenter d'une navigation peu

(1) Rappelons que le *blockhaus* est un réduit cuirassé dans lequel le commandant se tient pendant le combat et d'où il dirige avec quelques officiers, au moyen d'appareils de transmission, la manœuvre et le tir de son navire. La vue de l'horizon se fait par des fentes horizontales étroites, à la hauteur de l'œil.

Le *poste central* est une répétition du *blockhaus*, mais au-dessous des deux ponts cuirassés, c'est-à-dire très au-dessous de la flottaison.

sûre, guidée par un compas, celui du poste central, sur la compensation duquel on ne pourra guère compter, abstraction faite des grandes irrégularités de fonctionnement que présentent par ailleurs les compas de postes centraux.

17. *Principe de la compensation à l'aide du déflecteur.* — Une méthode de compensation rapide et ne nécessitant pas d'observations extérieures au navire a donc un grand intérêt, même si sa précision n'atteint pas celle de la méthode des relèvements. *Égaliser la force directrice du compas à tous les caps* constitue une telle méthode; car nous avons vu d'une part que le compas est alors compensé, à une erreur constante près, négligeable dans certaines conditions que nous allons préciser, et d'autre part il est bien évident que la mesure de la force directrice est possible de plusieurs manières, au moins théoriquement, par des expériences portant uniquement sur le compas.

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Sir Edward Sabine ⁽¹⁾ en 1848, mais elle n'est devenue d'un usage pratique qu'après l'invention, par Lord Kelvin, du petit appareil qu'il a appelé *défecteur* (1878).

18. *Défecteur.* — Un déflecteur est, en principe, un aimant qu'on place horizontalement au-dessus de la rose et de manière que son centre soit sur l'axe vertical de la rose.

Pour une certaine orientation du déflecteur *ns* (*fig. 5*), la rose, dirigée d'abord suivant OH, est dirigée suivant OR; la *déflexion* est l'angle

$$\theta = \text{HOR},$$

et l'*angle de position* du déflecteur l'angle

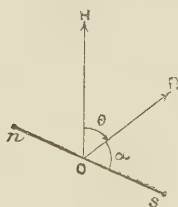
$$\text{ROS} = \alpha.$$

⁽¹⁾ Voir Sir William THOMSON, *Popular Lectures and Adresses*, t. III, p. 322.

Soit M_α le couple directeur créé par le déflecteur sur la rose, de moment magnétique M ; on a

$$M_\alpha = MH \sin \theta.$$

Fig. 5.



Supposons que le champ, au lieu d'être H , soit H' , et que l'on fasse agir le déflecteur de façon que l'angle de position soit le même; la déflexion est alors θ' et l'on a

$$M_\alpha = MH' \sin \theta',$$

d'où

$$\frac{H'}{H} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}.$$

En faisant tourner le navire et en mesurant dans chaque cas $\sin \theta$, on aura en valeur relative la force directrice du compas à différents caps. Mais il faudrait mesurer l'angle θ avec une précision qui n'est pas compatible avec la difficulté qu'il y a à tenir une route à la mer et avec la petitesse de l'angle θ à certains caps; la précision dans la mesure de l'angle θ est moins importante en effet si l'angle θ est grand, car on a

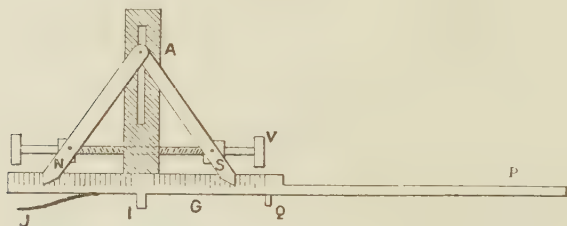
$$\frac{dH}{H} = - \frac{d\theta}{\tan \theta}.$$

Aussi n'opère-t-on pas comme il vient d'être dit. On fait varier M_α tout en maintenant α constant et de manière à donner toujours à θ une valeur de 90° .

Pour cela, dans le déflecteur de Lord Kelvin, on fait varier le moment magnétique du déflecteur, grâce à l'ingénieuse disposition suivante : deux aimants, aussi iden-

tiques que possible, sont articulés en l'un de leurs pôles A (*fig. 6*) et l'on peut les écarter plus ou moins de l'autre, comme les branches d'un compas, au moyen de la vis à double filet V; leurs extrémités se déplacent devant une

Fig. 6.



graduation G. Le bouton I est placé dans un petit trou au centre de la glace du compas, et le déflecteur est soutenu par les pieds Q et le ressort J. La tige P se projette au-dessus de la graduation de la rose et permet de lire directement sur elle l'angle de position.

En première approximation, on peut supposer que le couple M_α est proportionnel au moment magnétique du déflecteur, c'est-à-dire à la distance des pôles. Pour comparer deux champs H et H' on règle cette distance de manière que dans chaque cas la déflexion θ soit de 90° et l'angle de position α voisin de 90° (on amène généralement le pointeur sur l'E. $\frac{1}{4}$ N.E. de la rose, soit $\alpha = 78^\circ 45'$). Si pour le champ H la distance des pôles est d , et d' pour le champ H', on aura

$$\frac{d}{d'} = \frac{H}{H'}.$$

Si les distances d et d' sont très différentes, cette relation de proportionnalité n'est plus suffisante, étant donnée la faible distance entre les aimants du déflecteur et les huit aiguilles du compas Thomson; on a alors

$$\frac{f(d)}{f(d')} = \frac{H}{H'},$$

la fonction $f(d)$ étant évidemment facile à déterminer expérimentalement ⁽¹⁾.

19. *Conditions d'emploi.* — Ainsi, le déflecteur permettra de s'assurer que la force directrice *dans le plan horizontal de la rose* est la même à tous les caps. A quelles conditions est-on assuré que la compensation est alors effectuée, autrement dit quelles sont les conditions d'emploi du déflecteur pour la compensation?

D'après le paragraphe 11 on sait que si le vecteur X' , Y' , qui définit le champ *horizontal* au centre du compas, balaie un cercle quand le navire fait un tour d'horizon, ce vecteur est à chaque cap parallèle à une direction faisant un angle constant avec le champ terrestre; cet angle constant est celui dont il faut faire tourner les axes xOy pour les amener sur d'autres axes rectangulaires $x'Oy'$ définis relativement aux premiers par les paramètres directeurs

	Ox	Oy
Ox'	$1 + a$	b
Oy'	d	$1 + e$

Pour que la compensation dans le plan horizontal soit faite, il faut que les deux systèmes d'axes coïncident, c'est-à-dire que l'on ait

$$b = 0, \quad d = 0,$$

ou

$$a = 0, \quad e = 0.$$

La méthode de compensation sur laquelle est fondée l'emploi du déflecteur est donc applicable, en particulier,

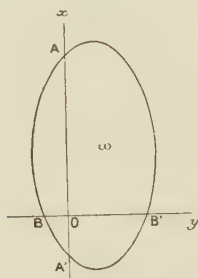
(1) On trouvera des renseignements détaillés sur le maniement, assez délicat, du déflecteur dans l'Ouvrage de M. E. GUYOU, *Description et usage des instruments nautiques*, p. 113.

pour les compas placés dans l'axe quand les fers doux sont symétriques.

Remarquons en passant que la compensation dans le plan horizontal de la rose n'implique pas que dans l'espace le champ au centre de la rose soit parallèle au champ terrestre; les équations du paragraphe 11 montrent que cette dernière condition exige, outre l'égalité de grandeur à tous les caps, que quatre quelconques des quantités b, c, d, f, g, h soient nulles. Il en est ainsi, en particulier, quand les fers doux sont symétriques par rapport au plan xOz .

20. *Pratique de la compensation.* — La courbe décrite par l'extrémité du vecteur X', Y' est bien évidemment une ellipse (*fig. 7*), projection sur le plan des xy

Fig. 7.



d'une section de l'ellipsoïde rencontré au paragraphe 11. C'est le *dygogramme elliptique* de M. le commandant Guyou ⁽¹⁾. En fonction des coordonnées X, Y , les coordonnées du point correspondant de ce dygogramme sont

$$X' = (1 + a)X + bY + cZ + P,$$

$$Y' = dX + (1 + e)Y + fZ + Q,$$

⁽¹⁾ Voir, dans le *Manuel des Instruments nautiques*, l'étude complète des différentes espèces de dygogrammes qu'il est possible d'obtenir suivant l'ordre dans lequel on compose les forces F_1, F_2, F_3 (p. 97).

ou bien

$$X' = [(1 + \mathfrak{D}) \cos \zeta - (\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) \sin \zeta + \mathfrak{B}] \lambda H,$$

$$Y' = [(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cos \zeta + (1 - \mathfrak{D}) \sin \zeta + \mathfrak{D}] \lambda H.$$

Si l'on a $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, cette ellipse a ses axes parallèles aux axes de coordonnées. Cela est bien évident du reste si l'on se reporte à la génération de cette ellipse, dont un point est l'extrémité de la résultante des vecteurs F_1 , F_2 et F_3 dont les mouvements sont définis par le théorème de M. Guyou.

Si l'on appelle L et M les axes, on a évidemment

$$L = F_1 + F_3,$$

$$M = F_1 - F_3$$

et le vecteur $\overline{O\omega}$ est identique à F_2 .

Pour compenser il faut, au moyen d'aimants (et de la barre de Flinders), amener ω en O et égaliser les axes de l'ellipse.

Le cap étant au *nord du compas* (c'est-à-dire le champ au centre du compas étant dirigé suivant Ox), on détermine l'ouverture d qu'il faut donner au déflecteur pour qu'il produise une déflexion de 90° avec un angle de position déterminé ($\alpha = 70^\circ 45'$, par exemple). Soit d_1 l'ouverture qui correspond au cap du *sud du compas*; on a

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{f(d)}{f(d_1)}.$$

On ouvre le déflecteur à la division d_2 telle que

$$f(d_2) = \frac{1}{2} [f(d) + f(d_1)],$$

et l'on place des aimants longitudinaux dans l'habitacle du compas de manière que, cap au nord ou sud du compas, la déflexion de 90° soit atteinte avec le même angle α et cette ouverture d_2 . Le centre ω de l'ellipse est bien

évidemment ramené sur $O\gamma$. On fait les mêmes opérations à l'est et à l'ouest du compas, et des aimants transversaux permettent de ramener le centre ω au point O ; l'ouverture correspondante du déflecteur est alors d'_2 .

Nous avons vu au paragraphe 14 que la puissance compensatrice des globes à employer était donnée par la relation

$$\sin \delta_m = \frac{F_3}{F_1}.$$

Or, on a

$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{L - M}{L + M} = \frac{f(d_2) - f(d'_2)}{f(d_2) + f(d'_2)}.$$

Connaissant donc d_2 et d'_2 , on sait, d'après la Table des puissances compensatrices ou de δ_m , quels globes il faut placer par le travers du compas et à quelle distance.

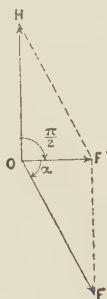
Seulement, le magnétisme induit dans les globes par les aimants correcteurs déjà placés modifiera le vecteur F_2 au centre du compas, et il faudra qu'une seconde série d'opérations, où l'on ne touchera plus qu'à ces aimants, permette de compenser cette influence secondaire.

21. Inconvénients. — Malgré l'élégance et la simplicité de cette méthode, où il n'y a aucun calcul à faire, elle ne paraît être devenue d'un emploi courant dans aucun pays. C'est que le maniement du déflecteur, qui demande à terre et par beau temps une certaine dextérité et une assez grande habitude, devient impraticable dès qu'il n'est plus possible de tenir la route d'une manière tout à fait sûre (les embardées de 1° ou de 2° n'ont cependant qu'une faible influence sur le résultat).

La difficulté précédente est accrue pour les compas dont la force directrice est faible (poste central, par exemple). En effet, le champ directeur de la rose, quand la déflexion est de 90° pour un angle de position voisin de $\frac{\pi}{2}$, est beaucoup plus faible que le champ directeur de la rose, déflecteur enlevé. Pour nous en rendre compte, admettons,

ce qui ne nous donnera qu'une idée approchée du phénomène, que les aiguilles de la rose se réduisent à une seule, très petite, de centre O (*fig. 8*). Le champ du défecteur au

Fig. 8.



point O est OF et la direction de la rose OF'; on a

$$OF' = \frac{H}{\tan \alpha}.$$

Si l'on suppose $\alpha = 78^{\circ} 45'$, on a

$$OF' = \frac{H}{5}$$

environ. Les perturbations mécaniques dues aux mouvements de roulis et de tangage du navire, dues aussi au frottement du pivot sur la chape, prennent donc une importance beaucoup plus grande que dans l'emploi ordinaire du compas.

IV. — Difficultés spéciales au blockhaus et aux sous-marins.

22. Dans le blockhaus, où il serait particulièrement désirable d'avoir le cap (sinon, peut-être, au moment même du combat, mais du moins aussitôt avant et aussitôt après), les difficultés d'emploi du compas et du défecteur sont considérablement accrues par l'extrême faiblesse de

la force directrice; les parois d'acier du blockhaus, épaisses de 15^{cm} à 25^{cm}, constituent en effet un écran magnétique important; en outre, elles contiennent des pôles d'autant plus gênants qu'ils sont plus rapprochés d'un compas qu'on placerait à l'intérieur du blockhaus; ces pôles d'ailleurs peuvent être puissants et leur masse magnétique variable en grandeur et même en position. Néanmoins, toute aimantation considérée comme permanente pouvant être compensée par des aimants, la difficulté la plus sérieuse résulte de la faiblesse de la force directrice; le couple directeur magnétique, une fois la compensation supposée faite, est bien le même à tous les caps, mais, du moins avec le compas Thomson, il est du même ordre de grandeur que le couple de frottement du pivot sur la chape; il en résulte : 1° que le compas n'a aucune sensibilité et qu'il suit très mal les évolutions; 2° que ses mouvements d'oscillations, s'il vient à être dérangé de sa position d'équilibre, ce que le frottement signalé et les mouvements de roulis et de tangage font à chaque instant, sont extrêmement lents. Si l'on songe enfin que dans le voisinage du compas il y a des pièces de canon énormes dont l'orientation change constamment et modifie en même temps de quelques degrés la position d'équilibre de la rose pour un même cap, on se rend compte qu'un compas placé dans le blockhaus n'atteindrait jamais une position d'équilibre stable. Aussi a-t-on supprimé dans la Marine française ceux qu'on avait essayé d'y mettre.

Pour remédier à cet état de choses, on a cherché, à l'étranger, dans plusieurs directions différentes.

On a songé, en Allemagne particulièrement, à faire la paroi cuirassée du blockhaus en acier au nickel, à forte teneur de nickel; on sait que, pour une certaine teneur de nickel (25 pour 100 au moins), on obtient un métal dont la perméabilité magnétique n'atteint pas 2. Ce métal, extrêmement coûteux, n'a été employé en fait que pour la

calotte du blockhaus, qui est destinée à supporter des chocs moins directs ⁽¹⁾; cela ne peut que remédier faiblement à la raréfaction du champ produite par la paroi verticale.

Ce qui montre que cette solution n'a pas donné satisfaction dans le pays qui l'a préconisée, c'est que la Marine allemande paraît s'être particulièrement intéressée, ces dernières années, au problème de la transmission des indications d'un compas dans le blockhaus. Plusieurs dispositifs ont été imaginés dans ce but. Nous ne pouvons songer à les décrire. Ils consistent en général dans la transmission pure et simple des indications d'un compas sec ⁽²⁾ ou d'un compas liquide ⁽³⁾, et ne présentent par conséquent aucun avantage spécial au point de vue de la compensation du compas transmetteur, qu'on est obligé de placer dans un endroit protégé des coups, dans le poste central par exemple; or on sait que cet emplacement, s'il est acceptable pour un compas, donne cependant naissance à bien des difficultés en ce qui regarde la compensation et la force directrice. Le compas Siemens et Halske, fondé sur le principe du bolomètre, est en essais dans diverses Marines: c'est un appareil ingénieux, mais compliqué. On verra plus loin (III^e Partie) la solution que nous proposons avec notre compas électromagnétique; cette solution a l'avantage d'être plus simple, mais surtout de donner pour la compensation des facilités qu'aucune méthode, croyons-nous, n'avait données jusqu'à présent.

Enfin, la possibilité de donner à la rose des compas liquides un grand moment magnétique fait songer aussitôt qu'ils pourraient rendre des services dans un blockhaus. Mais on verra dans la deuxième Partie à quelles difficultés

⁽¹⁾ CORBARA, *Trattato sul magnetismo delle navi in ferro*, etc., 1907, p. 292.

⁽²⁾ Appareil Siemens et Halske, du professeur EINTHOVEN.

⁽³⁾ Appareil Neufeldt et Kuhnke, du professeur FREESE.

spéciales se heurte leur emploi. En fait, il paraît qu'ils ont donné dans les blockhaus de moins bons résultats que les compas secs ⁽¹⁾.

Une dernière voie dans laquelle on a cherché est celle d'une boussole gyroscopique. On ne paraît pas être encore arrivé à un appareil réellement utilisable.

Notons que la nécessité d'une méthode rapide de compensation ou de vérification de la compensation, sans relèvements, serait tout particulièrement grande pour un compas qu'on placerait dans le blockhaus, à cause des modifications peut-être assez rapides, certainement brusques à la suite de chocs violents, du magnétisme dit *permanent* de la paroi cuirassée toute voisine du compas.

23. C'est une difficulté de cette nature, ajoutée à d'autres, qui rend l'emploi des compas magnétiques si précaire à bord des sous-marins. Il sera cependant impossible de jamais songer à utiliser un grand sous-marin, destiné à de longues traversées, s'il n'est pas muni d'un compas sûr. De plus, les pôles des dynamos motrices, s'ils ne sont pas très éloignés du compas, constituent une influence perturbatrice qui peut être d'autant plus gênante qu'elle est variable avec le mode de propulsion du navire (utilisant tantôt un moteur à explosion, tantôt des moteurs électriques), et aussi avec l'allure du navire. Les câbles conducteurs des divers courants employés pour le service du bord (propulsion et éclairage) peuvent n'avoir qu'une importance assez faible si l'on prend soin de mettre partout, aussi voisins l'un de l'autre que possible, le câble d'aller et le câble de retour.

24. Nous avons, dans cette première Partie, indiqué le mode d'emploi des compas et le principe des deux méthodes permettant actuellement de les compenser, celle des relèvements, précise, générale, mais longue, laborieuse

(1) CORBARA, *loc. cit.*, p. 292.

et nécessitant des conditions atmosphériques favorables, et celle du déflecteur, plus rapide, un peu moins générale, ayant l'avantage de ne pas utiliser d'observations extérieures du navire, mais d'un emploi difficilement applicable à la mer dans beaucoup de cas.

Nous avons aussi indiqué les difficultés spéciales que rencontre l'emploi d'un compas dans un blockhaus, où cet appareil serait cependant bien utile, et dans un sous-marin, où il est indispensable.

Nous n'avons pas décrit de compas. On trouvera dans maints Ouvrages, à commencer par le Tome III de *Popular Lectures and Adresses* de Lord Kelvin, la description du compas Thomson et la théorie qui rend compte de sa stabilité à la mer. L'Ouvrage déjà cité de M. Corbara contient la description détaillée d'un certain nombre de compas liquides.

Ce sont ces compas, assez en vogue à l'étranger, surtout en Italie, que nous nous proposons maintenant d'examiner au point de vue de leur fonctionnement et de leur compensation.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

L'ENTRAÎNEMENT DES COMPAS LIQUIDES PENDANT LES ÉVOLUTIONS.

1. Lord Kelvin a montré ⁽¹⁾ que, contrairement à une opinion répandue, au moins avant l'emploi de son compas dans la plupart des Marines du globe, un compas doit être d'autant moins *stable* à la mer que son moment ma-

(¹) *United Service Institution Lectures*, 1878 et 1880. Reproduction dans le Tome III de *Popular Lectures and Adresses*.

gnétique est plus grand. On dit qu'un compas est d'autant plus stable qu'il oscille moins autour de sa position d'équilibre (dans un plan horizontal, bien entendu) pendant les mouvements de roulis et de tangage. Il a montré aussi que cette stabilité devait être cherchée en augmentant le plus possible le moment d'inertie de la rose autour de son axe vertical, sans toutefois l'alourdir. C'est pour cela que dans sa rose, si admirablement établie, le poids est autant que possible réparti à la périphérie.

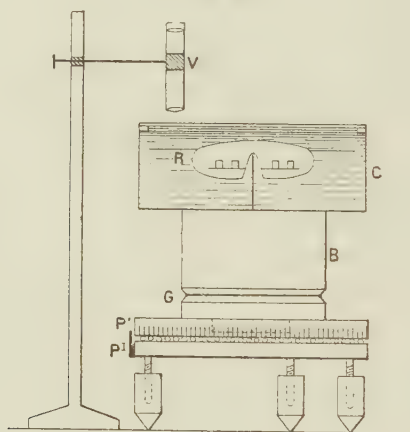
2. Néanmoins, les compas de grand moment magnétique paraissent avoir un avantage important. Quand un compas est écarté de sa position d'équilibre, le couple qui tend à l'y ramener est proportionnel au produit de son moment magnétique par l'intensité du champ extérieur. En divers endroits des navires cuirassés où il est cependant indispensable d'avoir les indications d'un compas, la valeur moyenne de ce champ n'est qu'une fraction du champ terrestre qui peut varier de 0,7 à 0,2, 0,7 environ dans les *postes centraux* par exemple, situés en dessous des deux ponts cuirassés et de la ceinture cuirassée qui les réunit, 0,2 dans les *blockhaus*. Dans les *blockhaus* on a complètement renoncé à mettre des compas Thomson : si soignés que soient leur chape en agate et leur pivot en osmiure d'iridium, le couple de frottement est trop grand par rapport au couple directeur, et la rose n'a aucune sensibilité. Dans les *postes centraux* ils sont susceptibles, quand on les compense bien, de donner de bonnes indications si la chape et le pivot sont en parfait état ; mais le plus souvent les indications du compas du poste central manquent de précision. On peut espérer qu'un compas de grand moment magnétique en donnera davantage, si d'une part on peut diminuer dans une certaine mesure l'augmentation de frottement qui résulte de l'augmentation de poids des aimants, et si d'autre part on peut obvier à l'instabilité à la mer signalée par Lord Kelvin,

3. Ces deux desiderata sont réalisés dans les compas appelés *liquides*. La rose est munie d'un flotteur qui généralement porte la chape et contient les aimants. La cuvette du compas est complètement remplie d'un liquide, généralement constitué par un mélange en proportions convenables d'alcool et d'eau. Ce mélange est commode, parce qu'on peut régler cette proportion de manière que la poussée hydrostatique fasse équilibre, à quelques grammes près en moins, au poids du système; la pression de la chape sur le pivot n'est plus alors que de quelques grammes. D'ailleurs le frottement visqueux du liquide ne change pas la position d'équilibre de la rose, comme ferait un frottement solide avec lequel la *position* d'équilibre unique serait remplacée par une *plage* d'équilibre; et cependant il constitue un procédé d'amortissement, qu'on peut rendre aussi puissant qu'on le veut, des oscillations de la rose. Aussi le compas liquide est-il essentiellement un compas de mauvais temps.

4. Mais, dans certaines Marines, il leur a été trouvé des qualités si séduisantes, qu'ils ont été pris comme compas étalons à la place du compas Thomson. En fait, les compas liquides (il en existe un assez grand nombre de modèles ingénieusement construits) jouissent, actuellement du moins, d'une certaine faveur. Il faut donc examiner s'ils sont susceptibles de servir de compas de précision. Il est clair que l'intensité de leurs pôles doit réagir d'une manière importante sur les correcteurs en fer doux, réaction dont il n'a pas été tenu compte dans les méthodes de compensation plus haut résumées et qui doivent, de ce chef, subir des modifications. D'autre part, la *liaison* que le liquide établit entre la rose et la cuvette du compas, ou en définitive le navire, doit produire un certain entraînement pendant les évolutions. C'est ce point que nous allons examiner d'abord en renvoyant l'étude du premier au Chapitre suivant,

5. *Dispositif expérimental.* — Le compas est placé sur un support construit comme il suit : une plaque circulaire de bronze P (fig. 9), de 1^{cm} environ d'épaisseur et 12^{cm} de diamètre, est soutenue par trois fortes vis calantes ; sur sa face supérieure est tracé au tour un sillon,

Fig. 9.



à quelques millimètres du bord ; une autre plaque semblable P' est pourvue d'un sillon identique ; elle repose sur la plaque inférieure par un jeu de billes qui roulent dans les deux sillons. Ce genre de support est facile à construire soi-même, l'opposition exacte des deux sillons s'obtenant sans difficulté par tâtonnement, et l'on obtient ainsi des supports extrêmement stables et tournant autour de leur axe vertical avec une très grande facilité. La plaque P' est surmontée d'un billot de bois B, d'une dizaine de centimètres de hauteur et sur la surface duquel est creusée une gorge G ; c'est sur ce billot de bois que l'on place le compas C. Une corde passant sur la gorge G est entraînée par une poulie directement montée sur l'axe d'un mouvement d'horlogerie suffisamment éloigné du compas (4^m environ). Sur la tranche de la plaque P' est

tracée une graduation en degrés qui défile devant un index I fixé à la plaque inférieure. Pour mesurer la vitesse de rotation de l'appareil, on notait avec un compteur à secondes les moments des passages d'une même division sous l'index I; quand la vitesse était très faible, on faisait ce pointage pour des divisions équidistantes de 10° , 20° ou 40° .

La position de la rose était repérée au moyen d'un viseur V pointé sur une division déterminée de la graduation R, la rose étant en équilibre et l'appareil immobile. On faisait ce pointage au moyen d'un réticule contenu dans le viseur et dont on amenait un fil à coïncider avec la division. Le viseur était porté par un support en bois solidement calé sur la table. Le champ du viseur était assez grand pour permettre la lecture des numéros inscrits sur la rose, numéros assez grands et destinés à la lecture à l'œil nu; la fraction de degré était connue par estimation; mais une exactitude certaine de plus de $0^{\circ},2$ ne pouvait guère être obtenue dans les lectures, à cause de la grosseur des traits marqués sur la rose.

6. Cinq compas de construction ou de dimensions différentes ont été examinés. Qu'il nous soit permis de remercier très vivement ici le chef du service des instruments nautiques, M. le capitaine de frégate G. de Cacqueray, de l'obligeance avec laquelle il nous a prêté ces compas sur autorisation du Ministre de la Marine.

Il n'entre pas dans le plan de ce travail de décrire en détail ces cinq compas, dont quatre étaient des compas liquides et le cinquième un compas de la Marine française modèle Thomson. Les compas liquides ne diffèrent les uns des autres que par leur moment magnétique plus ou moins grand, les dimensions et la forme du flotteur, la disposition des aimants par rapport à ce flotteur, le diamètre de la rose qui en est solidaire, l'épaisseur plus ou moins grande de liquide entre la rose ou le flotteur et les

parois de la cuvette, enfin par les moyens employés pour donner à la cuvette une certaine élasticité permettant au liquide de se contracter ou de se dilater en remplissant toujours complètement l'espace compris entre les parois de la cuvette, la rose et la glace qui ferme la partie supérieure de la cuvette. Dans un des compas examinés par nous, le compas Chetwynd, la rose est très éloignée des parois de la cuvette, dans le but, d'après les indications données dans le brevet, d'éviter l'entraînement de la rose pendant les évolutions. Deux des autres compas liquides ont été construits par M. Doignon et sont réglementaires dans la Marine française; l'un d'eux a une rose de 20^{cm} de diamètre et l'autre de 13^{cm} environ; le troisième est un petit compas liquide construit par la maison Kelvin et White, de Glasgow (rose de 15^{cm}).

7. Supposons qu'une déviation constante δ soit atteinte quand le compas tourne avec une vitesse également constante; le couple de viscosité C fait alors équilibre au couple magnétique; si H est le champ et M le moment magnétique du compas, on a donc

$$C = MH \sin \delta.$$

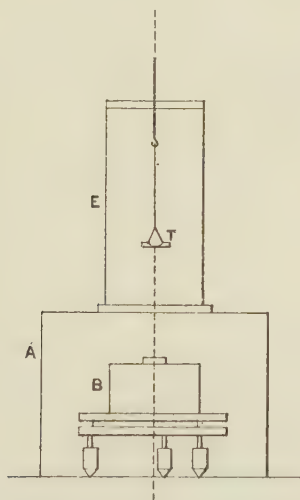
Le couple C dépend de la vitesse angulaire, du coefficient de viscosité du liquide et de la configuration formée par la rose, le flotteur et la cuvette. Cette configuration n'est pas exactement de révolution et en tout cas elle n'est guère définissable; elle varie d'une manière inconnue d'un modèle à un autre; il n'est donc pas utile de connaître non plus exactement le moment magnétique de chaque modèle, puisque chaque modèle est caractérisé par $\frac{C}{M}$ et que nous ne connaissons pas C .

Mais pour un modèle donné et une vitesse angulaire donnée $\frac{C}{M}$ est constant. Le sinus de la déviation δ varie alors en raison inverse du champ extérieur. Il est donc

nécessaire de fixer la valeur du champ H dans lequel nos expériences ont été faites. On pourra en déduire la déviation que subira, aux différents points du globe, un compas d'un modèle déterminé, placé sous une cuirasse qui réduit l'intensité moyenne du champ magnétique aux différents caps dans un rapport connu (λ).

8. Cette détermination de H n'a d'ailleurs pas besoin d'être faite avec une précision supérieure à celle qu'il est permis d'attendre des mesures de ce rapport λ . Étant donnés les moyens qui se trouvaient à notre disposition, le procédé le plus simple nous a paru être le suivant, qui ne se prête pas à des mesures aussi exactes que la méthode de Gauss, mais est d'une mise en œuvre très commode pour le cas présent.

Fig. 10.



A travers le bouchon qui ferme une large éprouvette E (10^{cm} de diamètre environ) passe (*fig. 10*) une tige de laiton à l'extrémité inférieure de laquelle est accroché un fil de cocon qui porte un petit barreau aimanté ($l = 3^{\text{cm}}$ en-

viron) dans un étrier en papier T. On met l'éprouvette sur un support en bois A de manière que le fil de cocon soit sur l'axe de rotation du support décrit plus haut. Cela est facile, car on peut facilement marquer le centre du billot de bois B par un petit cône, centré au tour, et un cathétomètre réglé, immobilisé dans un même azimut, permet alors de placer commodément le fil sur la verticale passant par le sommet du cône. On s'assure d'abord, en élevant et en abaissant la tige de laiton et en mesurant la période d'oscillation du barreau dans chaque position, que le champ est uniforme sur une cinquantaine de centimètres par exemple à partir de la face supérieure du billot B. Soient T la demi-période constante, I le moment d'inertie du barreau, μ son moment magnétique et H le champ; on a

$$\mu H = \pi^2 \frac{I}{T^2}.$$

On surcharge l'étrier d'un petit barreau de cuivre de moment d'inertie connu I'; on a

$$\mu H = \frac{\pi^2 (I + I')}{T'^2},$$

d'où

$$\mu H = \frac{\pi^2 I}{T'^2 - T^2}.$$

On met alors le barreau μ sur le billot B, le milieu du barreau au centre, en l'orientant sensiblement suivant le champ dont il indiquait préalablement la direction, et on le remplace dans l'étrier T par un autre petit barreau μ' . On mesure au cathétomètre la distance r des deux barreaux et la période du barreau μ' en donnant successivement au support B un certain nombre d'orientations différentes autour de la position qui correspond sensiblement au parallélisme du barreau μ et du champ initial. La période du barreau μ' passe par un maximum τ' . On

enlève le barreau μ ; la période du barreau μ' devient τ . On déduit facilement de là $\frac{\mu}{H}$. En effet le barreau μ produit en O' (fig. 11) un champ H' , de sens contraire au

Fig. 11.



champ H et égal à $\frac{\mu}{NO'^3}$; on a donc

$$\tau^2 = \frac{\pi^2 i}{\mu' H}, \quad \tau'^2 = \frac{\pi^2 i}{\mu' \left(H - \frac{\mu}{NO'^3} \right)},$$

d'où

$$\frac{\tau^2}{\tau'^2} = 1 - \frac{1}{NO'^3} \frac{\mu}{H}, \quad \frac{\mu}{H} = NO'^3 \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau'^2} \right).$$

Si la distance OO' est suffisante, on peut remplacer NO' par r et l'on a

$$\frac{\mu}{H} = r^3 \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau'^2} \right) \quad (1).$$

Exemple. — 1°

$$40 T = 2' 5'',$$

$$40 T' = 2' 21'', 3.$$

Le barreau de cuivre additionnel a une longueur de 2^{cm}, 97 et un diamètre de 0^{cm}, 388. Pour connaître l'

(1) Cette méthode est très voisine de celle de Poisson (*Connaissance des Temps*, 1828, p. 113). L'emploi du cathétomètre permet un montage plus précis et plus simple.

avec le plus de précision possible, il faut encore mesurer son poids. Mais nous nous sommes contentés d'admettre pour densité du cuivre $d = 8,85$; cela ne peut produire sur I' qu'une erreur de 0,5 à 1 pour 100 au plus. On a alors, en appelant a le diamètre du barreau et l sa longueur,

$$I' = \pi \frac{a^2}{4} l d \left(\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{16} \right) = 2,3,$$

d'où

$$\mu H = 8,26.$$

2° On a

$$r = 15^{\text{cm}}, 692,$$

$$40\tau = 1'27'', 166.$$

Mesure de τ' :

Lectures
sur le tambour
gradué du
support B portant
le barreau μ .

$40\tau'$.

230 ⁰	1'.29'',2
240	1.29,3
250	1.29,7
260	1.29,55

Nous prenons donc

$$40\tau' = 1'29'', 7.$$

On a alors

$$\frac{\mu}{H} = 225,228.$$

On a donc

$$H = 0,19592.$$

Il est facile de voir que si l'on détermine les durées d'oscillation simple à $\frac{1}{1000}$ près, si I' est connu à 0,5 pour 100 près, si r est supposé connu exactement, ce qui correspond à une erreur de $\frac{1}{300}$ sur $\overline{NO'}$, et qu'enfin si l'on suppose que toutes les erreurs s'ajoutent, la valeur de H est connue avec une erreur relative maxima de

3 pour 100 ; c'est largement suffisant pour le but que nous nous proposons. D'après cela nous pouvons adopter

$$H = 0,196.$$

9. Donnons maintenant quelques indications sur la manière dont les déviations, correspondant à une certaine vitesse, sont déterminées.

Un aide ⁽¹⁾ observe le passage des divisions de la graduation portée par le plateau P' (*fig.* 9) devant l'index I ; il dit *top* chaque fois que passent les divisions 0, 90, 180, 270. Au même instant l'autre observateur, occupé à observer la rose au moyen du viseur V, note la division de la rose qui se trouve en coïncidence avec le fil du viseur et stoppe la *dédoublante* d'un chronomètre à secondes ; il quitte le viseur, fait la lecture sur le chronomètre, inscrit les deux nombres qu'il vient de lire et remet l'œil au viseur pour être prêt à répéter les mêmes opérations au moment du passage de la division cardinale suivante (0, 90, 180 ou 270) devant l'index I. La vitesse maxima que nous avons utilisée est celle de 1 tour en 35 secondes. Avec un peu d'entraînement on peut faire régulièrement les opérations précédentes, chacune comprenant au minimum 7 à 8 secondes.

Le but de ces quatre lectures par tour est le suivant : un léger défaut de perpendicularité de la glace qui ferme la cuvette du compas et de l'axe de rotation de l'appareil a pour conséquence une variation périodique de l'erreur de lecture par réfraction et, par suite, une variation périodique de la lecture elle-même. Voici un exemple :

(1) Nous tenons à saisir cette occasion pour remercier bien sincèrement M. Pierre Lalance, du laboratoire de Physique du Collège de France, pour l'aide qu'il nous a prodiguée à l'occasion de ces lectures et dans beaucoup d'autres circonstances.

Temps.	Déviation.	Lectures au tambour (angles de rotation).
^m ^s 0. 0.....	^o 0	0
2.37,8.....	$5 + \frac{2}{4}$	0
»		90
2.58,8.....	$6 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	180
»		270
3.20,2.....	$5 + \frac{3}{4}$	0
»	6	90
3.41	$6 + \frac{1}{4}$	180
3.51,8.....	$5 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	270
4.02,8.....	$5 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8}$	0
4.13,6.....	$5 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	90
4.25,1.....	6	180
4.35,2.....	$5 + \frac{3}{4}$	270
4.46	$5 + \frac{2}{4}$	0
4.57,2.....	$5 + \frac{3}{4}$	90
5.08,3.....	$5 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$	180
5.19,9.....	$5 + \frac{2}{4}$	270
5.30	$5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$	0

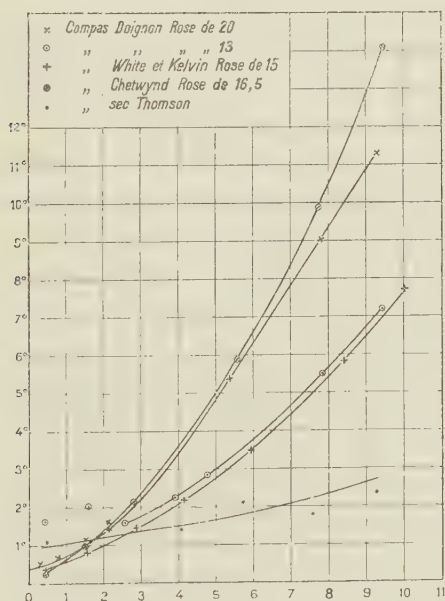
La périodicité signalée plus haut est, au moins qualitativement, manifeste. Comme elle est toujours dans le même rapport avec la période du mouvement et quel que soit le compas, il est bien évident qu'elle est due à la cause signalée plus haut. On prend alors comme déviation

moyenne la moyenne de toutes les lectures faites lorsque le régime permanent est atteint, et, comme moyenne de la durée d'un tour, le quadruple de la durée moyenne d'un quart de tour, calculée au moyen de toutes ces lectures de temps.

L'emploi des notations $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, ..., pour les lectures des déviations, était indiqué par la largeur des traits noirs marqués sur la rose, chaque trait ayant à peu près une largeur correspondant à $\frac{1}{4}$ de degré.

10. Les résultats ainsi obtenus sont résumés, pour les cinq compas qui ont été expérimentés, par les courbes

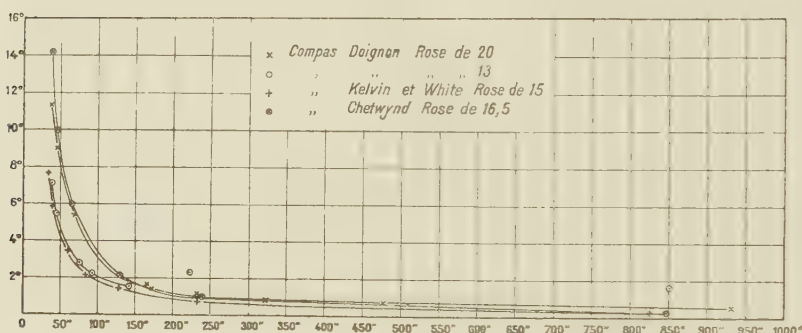
PL. I.



des planches I et II construites en prenant en abscisse soient les vitesses de rotation en degré par seconde (*Pl. I*), soient les durées de révolution (*Pl. II*). L'examen de ces courbes appelle quelques remarques.

1° On voit que même pour les vitesses très lentes réalisées (1 tour en 16 minutes) l'entraînement du compas existe. Les courbes de la planche II montrent nettement

PL. II.



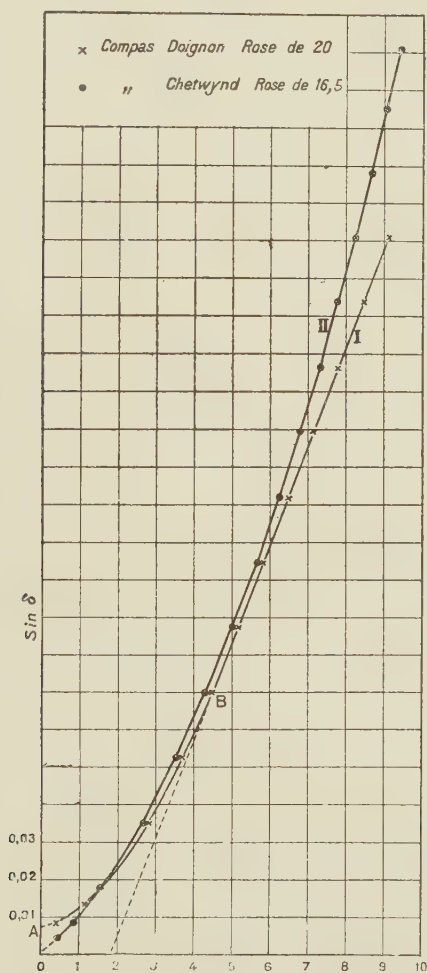
que la déviation, après avoir diminué rapidement avec la vitesse, reste à peu près constante pour toutes les vitesses moindres que celle qui correspond à 1 tour en 3 minutes; la déviation est alors due en majeure partie au frottement du pivot sur la chape.

Le mauvais état du pivotage se traduit par des irrégularités dans la déviation d'entraînement pour les faibles vitesses (petit compas Doignon). Ces variations de la déviation subsistent pour le compas Thomson à toutes les vitesses, comme le montre la manière irrégulière dont les points se distribuent de part et d'autre de la courbe moyenne. Cela se conçoit facilement, le couple de frottement solide ayant par rapport au couple magnétique une importance beaucoup plus grande que dans les compas liquides bien construits, et, de plus, l'amortissement des oscillations de la rose étant beaucoup plus faible.

2° Si la cuvette et la rose avec son flotteur étaient de révolution, le couple exercé sur la rose par viscosité serait rigoureusement proportionnel à la vitesse angulaire du compas, et par conséquent le sinus de la déviation

serait proportionnel à cette vitesse. La planche III contient les courbes de variations de $\sin \delta$ en fonction de la

PL. III.



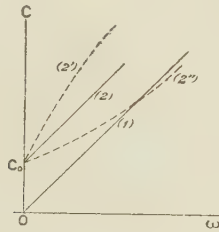
vitesse angulaire ω pour le compas Doignon (rose de 20^{cm}) et le compas Chetwynd. La courbe relative au compas

Doignon est rectiligne à partir de $\omega = 4,6$ (1 tour en 80 secondes). La courbe relative au compas Chetwynd conserve pour les plus grandes valeurs de ω (1 tour en 38 secondes) une forme parabolique. Cela est facilement explicable : le flotteur du compas Chetwynd est muni, probablement pour assurer la stabilité horizontale de la rose, de deux petites palettes verticales; le compas Doignon, au contraire, ne présente, en dehors du flotteur et de la rose, qui sont de révolution, aucun appendice important n'ayant pas cette forme. Dans le premier cas, un régime hydrodynamique permanent est évidemment irréalisable, l'action des palettes immobiles sur le liquide entraîné par la cuvette produisant des accélérations en certains points du liquide et, par suite, un couple qui varie plus vite que la vitesse angulaire. Dans le second cas, le régime est hydrodynamiquement permanent et la loi de variation du couple de viscosité avec la vitesse angulaire est linéaire.

Mais la droite représentative ne passe pas par l'origine, et il est à remarquer que son ordonnée à l'origine est *négative*; cela ne paraît susceptible que de deux interprétations : ou bien le couple de viscosité n'est pas proportionnel à la vitesse pour les vitesses très faibles que nous avons employées, ou bien c'est le couple de frottement de pivotement qui varie avec la vitesse. Si l'on admettait cette hypothèse, on serait conduit à ce résultat que *le couple de frottement de pivotement*, dont l'importance relative par rapport au couple de viscosité n'est pas négligeable dans l'intervalle AB, *diminue quand la vitesse augmente et tend vers une limite (différente de 0) quand la vitesse augmente de plus en plus*, limite pratiquement atteinte, dans notre expérience, pour une vitesse de l'ordre de 1 tour en 80 secondes. En effet, si le couple de viscosité existait seul, la courbe représentative de C et par conséquent de $\sin\delta$ en fonction de ω serait

une droite telle que (1) (fig. 12) passant par l'origine; si le couple de frottement de pivotement avait une valeur constante C_0 , quelle que fût la vitesse, la courbe serait la

Fig. 12.



ligne droite (2), ayant C_0 pour ordonnée à l'origine; si donc le couple de frottement de pivotement augmentait avec la vitesse, la courbe serait tout entière au-dessus de (2), en (2') par exemple; une courbe située en (2''), au-dessous de (2), indique donc nécessairement que le couple de frottement de pivotement diminue quand la vitesse augmente. Le dispositif expérimental employé permet une étude précise et commode du frottement de pivotement, sur lequel aucun travail n'a été fait, croyons-nous, en ce qui concerne sa variation avec la vitesse. Aussi nous proposons-nous de reprendre des expériences analogues pour étudier de plus près le résultat nouveau obtenu par nous, et contrôler l'interprétation *provisoire* que nous venons de donner en séparant complètement l'étude du frottement de pivotement du couple de viscosité.

41. Il n'entre pas dans le cadre de ce travail de prolonger des recherches dans cette voie; mais cette expérience nous semble mettre en évidence le principe d'une méthode d'étude du frottement de pivotement à la fois précise et très commode, car on peut faire varier la sensibilité à volonté, en augmentant ou diminuant le champ directeur de l'équipage magnétique.

Le même dispositif nous paraît devoir se prêter d'une manière particulièrement souple à l'étude de la viscosité. Nous avons commencé l'examen des dispositions à prendre pour l'appliquer aux gaz sous fortes pressions et à des températures variées.

12. La manière dont un compas liquide se comporte pendant une évolution ne dépend pas seulement de la déviation stable qu'il prendrait si le navire tournait indéfiniment avec la même vitesse angulaire, mais de la manière dont progresse la déviation suivant l'accélération angulaire du navire quand il commence à tourner et dont elle tend vers zéro quand le navire cesse de tourner.

Les résultats que nous avons donnés sur les déviations en mouvement de rotation permanent ont un certain caractère de généralité en ce sens qu'ils sont applicables à tous les compas d'un même type. Il faut noter qu'ils se rapportent à la température de 20° environ. Les courbes d'entraînement initial de chacun de ces types dépendent en outre de l'accélération angulaire du compas, laquelle peut varier dans de très larges limites. Nous donnons donc simplement les résultats ci-dessous à titre d'indication.

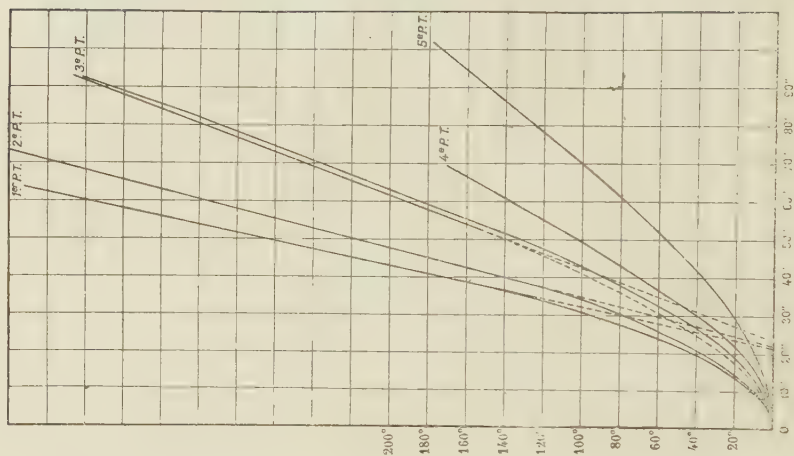
La rose étant en équilibre au milieu du compas immobile, on lit dans le viseur cette position d'équilibre et l'on déclenche le mouvement d'horlogerie; au même instant on fait partir la montre à secondes. On note au moyen de l'aiguille *dédoublante* les époques du passage sous le fil du réticule des divisions de la rose ou de fractions de division faciles à lire; comme il est indispensable ici de ne perdre de vue que le moins possible la rose, les nombres ainsi déterminés sont inscrits par un aide. On a ainsi la loi numérique de variation de la déviation en fonction du temps. Mais il est utile de la connaître en fonction des angles parcourus. On arrête le mouvement d'horlogerie, puis on le déclenche de nouveau en observant cette fois les époques du passage sous l'index I des divi-

sions marquées sur le tambour P' du support; on a ainsi la loi de variation des angles de rotation en fonction du temps. Exemple tiré des mesures faites sur le compas Chetwynd :

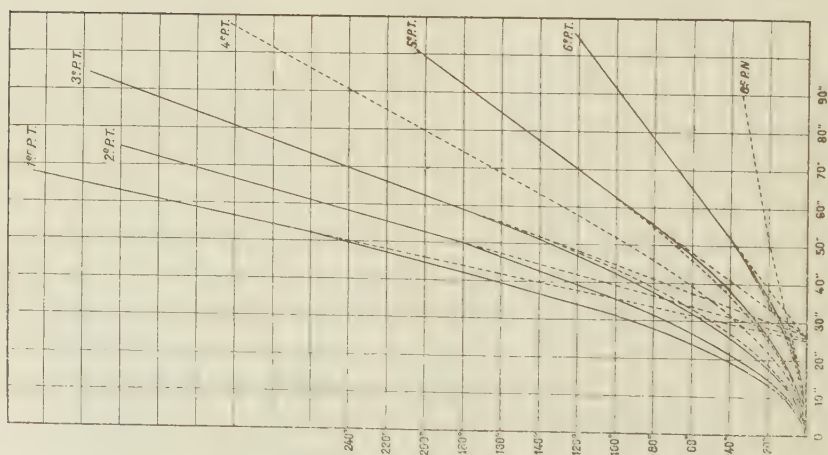
Temps.	Déviations.	Temps.	Angles de rotation.
m s	o	m s	o
0. 0	0	0. 0	0
8, 8.	0, 2	4, 4.	2
25	0, 3	9, 6.	10
50	1	23, 8.	60
1. 01, 3.	2	29, 2.	90
1. 11	3	42, 2.	180
1. 19, 6.	4	53	270
1. 26, 5.	5	1. 03	1 tour
1. 31, 6.	6	1. 12, 7.	» + 90
1. 37, 2.	7	1. 21	» + 180
1. 43	8	1. 31, 3.	» + 270
1. 51	9	1. 40	2 tours
2. 01, 7.	10	1. 48, 8.	» + 90
2. 10, 4.	11	1. 57, 5.	» + 180
2. 22, 6.	12	2. 06, 7.	» + 270
2. 32, 6.	12, 4	2. 15	3 tours
2. 43	13	2. 24	» + 90
3. 16	14	2. 33	» + 180
3. 42	14, 25	2. 42	» + 270
		2. 51	4 tours
		3	+ 90

Le Tableau de droite permet de construire une des courbes de la planche IV; elles comprennent une partie sensiblement parabolique au voisinage de l'origine, le mouvement d'horlogerie étant au départ uniformément accéléré; puis le modérateur à ailettes que possède ce mouvement acquiert une vitesse suffisante pour que le mouvement devienne uniforme et la parabole se raccorde à une ligne droite. La partie parabolique de la courbe nous permet de dresser le Tableau suivant :

Pl. IV.



Pl. IV.



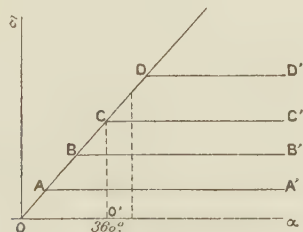
Temps.	Vitesses.	Accélérations γ .
s		
0.....	0	0,215
10.....	2,15	0,195
20.....	4,1	0,14
30.....	5,5	

Dans chaque expérience le mouvement est complètement défini par les courbes des planches IV et IV' ; à chacune de ces courbes correspond une des courbes des planches V, VI, VII, VIII, construites en prenant en abscisses les angles de rotation et en ordonnées la déviation.

13. On peut obtenir quelques résultats d'ensemble, dont la base est évidemment toute empirique et l'intérêt purement pratique, en comparant ces différentes courbes entre elles.

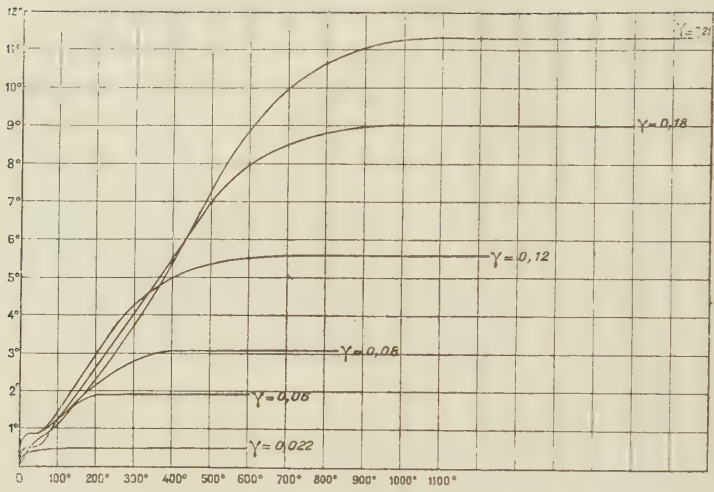
1° Pour un même compas, les courbes d'entraînement initial ont toutes une partie à peu près commune partant de l'origine et qu'on peut grossièrement assimiler à une droite ; pour des valeurs suffisantes des angles de rotation, les courbes deviennent des droites parallèles à l'axe des

Fig. 13.



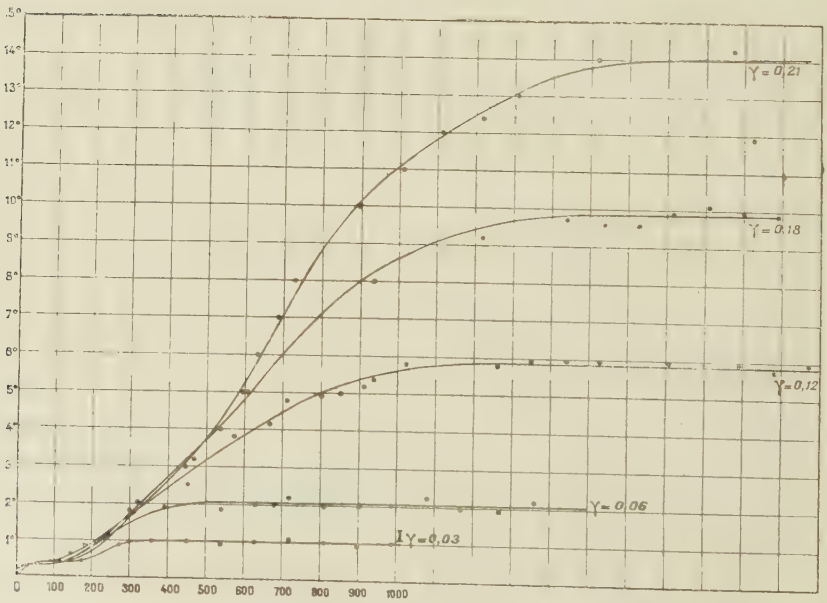
rotations. On peut donc schématiser les résultats comme l'indique la figure 13 et dire : *Quelle que soit l'accélération angulaire d'un navire au début d'une évolution, l'entraînement d'un compas liquide commence par être approximativement proportionnel à l'angle*

PL. V.



Compas Doignon (rose de 20). Courbes d'entraînement initial.

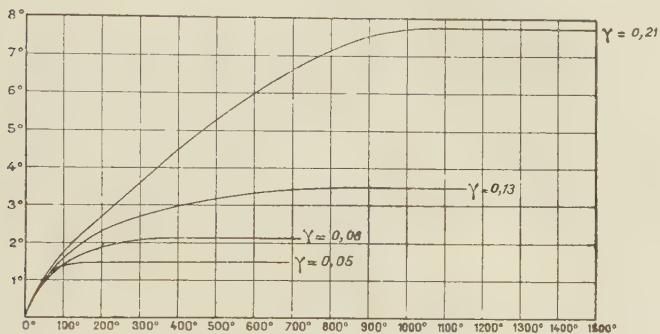
PL. VI.



Compas Chetwynd. Courbes d'entraînement initial.

de rotation; la déviation varie ensuite plus lentement au voisinage de la valeur maxima qu'elle prend et

PL. VII.

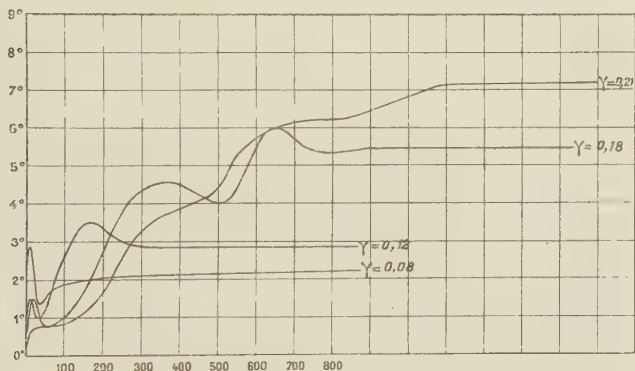


Compas Kelvin et White. Courbes d'entraînement initial.

garde quand la vitesse de rotation est devenue constante depuis un temps suffisant.

Les courbes de la planche VIII relatives au petit compas

PL. VIII.



Compas Doignon (rose de 13). Courbes d'entraînement initial.

Doignon montrent des oscillations que ne manifestent pas les autres courbes; cela vient, selon nous, de la valeur

plus grande, pour le compas examiné, du frottement de pivotement, en même temps que d'une valeur moindre de l'amortissement. Nous avons déjà vu que l'état du pivotage de ce compas devait être médiocre.

2° Pour les faibles valeurs de l'angle de rotation, les courbes relatives au compas Chetwynd et au grand compas Doignon présentent toutes un *palier*; il doit représenter une part du frottement de pivotement, qui agit presque seul au début du mouvement, les couches liquides au contact du flotteur et de la rose n'ayant pas encore eu le temps d'être mises en mouvement sensible par le frottement des couches plus rapprochées des parois de la cuvette. Ceci est particulièrement sensible pour le compas Chetwynd, qui possède une petite rose et une grande cuvette.

Ce compas a même été breveté à cause de cette disposition, adoptée spécialement pour éviter l'entraînement pendant les évolutions. Or, nous avons vu (*Pl. I et II*) que l'entraînement de ce compas en rotation permanente est un peu plus grand que celui des autres compas examinés, sauf pour les très faibles vitesses, à cause de l'excellente qualité de son pivotage; cela tient aux palettes verticales destinées à augmenter l'amortissement et la stabilité horizontale du compas et qui sont peu éloignées du fond de la cuvette. Mais ce compas présente cependant un avantage réel, au point de vue qui nous occupe, en ce sens que la déviation maxima est atteinte plus lentement que dans les autres compas; autrement dit, la droite OABCD de la figure schématique 13 est plus inclinée pour ce compas que pour les autres. Or cela a une importance pratique, parce qu'un navire n'a guère occasion, semble-t-il, de tourner indéfiniment, au moins avec une grande vitesse de rotation; on ne dépasse guère un tour complet; alors, tandis qu'avec le compas Doignon, par exemple, la déviation *maxima* au bout d'un tour est de 5° environ,

la déviation *maxima* subie par le compas Chetwynd dépasse à peine 2°.

14. Il résulte de cette discussion que l'on peut caractériser, au point de vue pratique, chaque type de compas par les déviations atteintes par entraînement au bout d'une seule giration complète.

Pour toutes les vitesses de rotation permanente supérieures à celle qui donne la déviation O'C (*fig.* 13), la déviation atteinte au bout d'un tour est toujours O'C.

Les déviations *au bout d'un tour* sont données dans les Tableaux suivants :

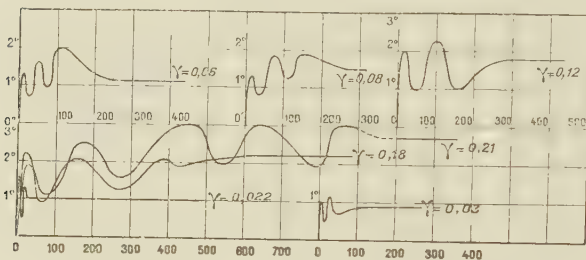
Intensité du champ magnétique $H = 0,196$.

Compas Doignon. (Rose de 20 ^{cm} , cuvette de 25 ^{cm}).		Compas Chetwynd. (Rose de 16 ^{cm} , 5, cuvette de 25 ^{cm} environ).	
Durée d'une giration.	Déviation.	Durée d'une giration.	Déviation.
$\leq \overset{m}{1} \dots \dots \dots$	$\overset{0}{5}$	$\leq \overset{m}{2} \dots \dots \dots$	$\overset{0}{2}$
2.....	2,5	3.....	1,3
3.....	1,5	4.....	1
4.....	1	$\geq 10 \dots \dots \dots$	$\leq 0,5$
$\geq 10 \dots \dots \dots$	$\leq 0,5$		
Compas Doignon. (Rose de 13 ^{cm} , cuvette de 15 ^{cm} environ).		Compas Kelvin et White. (Rose de 15 ^{cm} , cuvette de 16 ^{cm} environ).	
Durée d'une giration.	Déviation.	Durée d'une giration.	Déviation.
$\leq \overset{m}{1} \dots \dots \dots$	$\overset{0}{3,5} \text{ à } \overset{0}{4}$	$\leq \overset{m}{1} \dots \dots \dots$	$\overset{0}{3} \text{ à } \overset{0}{3,5}$
2.....	1,8	2.....	1,5
$\geq 3 \dots \dots \dots$	≤ 1	3.....	1
		$\geq 4 \dots \dots \dots$	$\leq 0,8$

Enfin les courbes d'entraînement initial d'un compas sec Thomson (*Pl. IX*) manifestent de fortes oscillations (pouvant atteindre 1°) et leur partie rectiligne ne corres-

pond qu'à la déviation maxima moyenne. Elles montrent que, pour toutes les vitesses étudiées, la déviation maxima est atteinte avant une giration complète. La loi de proportionnalité énoncée plus haut ne s'applique donc pas.

PL. IX.



Compas Thomson. Courbes d'entraînement initial.

Compas Thomson.

(Rose de 25^{cm},

cuvette de 26^{cm} environ).

Durée d'une giration.	Déviation.
m	o
1.....	2
2.....	1,5
≥ 3.....	≤ 1

Tous ces résultats dépendent naturellement dans une certaine mesure de l'état des pivotages; aussi n'ont-ils de valeur, nous l'avons déjà dit, qu'à titre d'indication pratique.

De plus, ils se rapportent au champ de 0,196 C. G. S. dans lequel nos expériences ont été faites; d'après la relation

$$C = MH \sin \delta,$$

C étant le couple de frottement solide et liquide, la déviation δ varie, pour ses petites valeurs, en raison inverse de H. Par exemple, un compas liquide placé dans

le blockhaus d'un cuirassé où le champ moyen ne dépasse guère les 0,2 du champ extérieur subirait dans nos latitudes et pour une giration complète durant plus de 10 minutes des déviations par entraînement de 2°,5 environ; elles atteindraient 5° pour la vitesse de giration maxima de 1 tour en 4 minutes.

Sur des torpilleurs la valeur moyenne du champ dans le blockhaus est des 0,7 aux 0,8 du champ terrestre; pour une durée de giration minima de 1 minute, les déviations à craindre par entraînement sont de l'ordre de 3° à 7° suivant le type de compas employé.

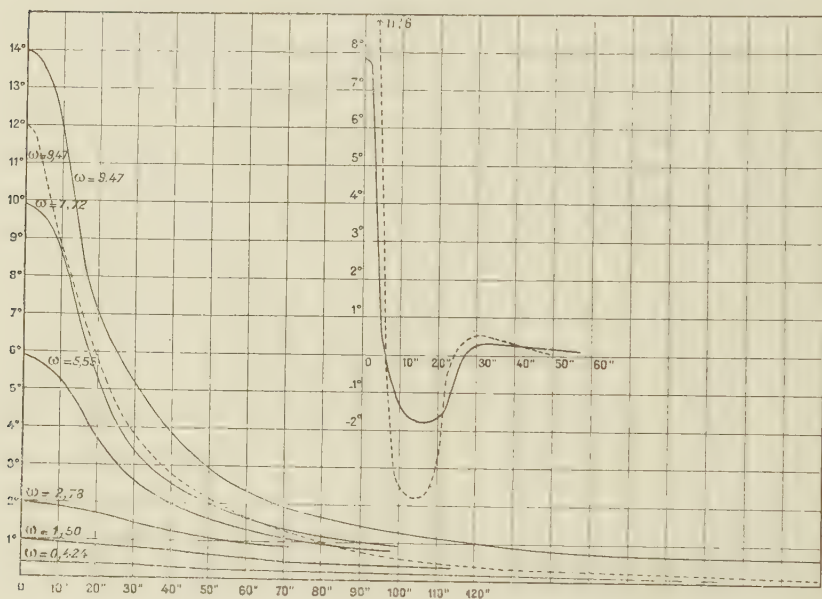
Enfin ces résultats se rapportent à la température de 20°. Or on sait que le coefficient de viscosité d'un liquide varie rapidement avec la température; ainsi, pour l'eau, le coefficient est 1,8 fois plus grand à 0° qu'à 20°; il est 1,5 fois plus petit à 40° qu'à 20°. Il faut multiplier à peu près dans le même rapport les déviations indiquées ci-dessus, le liquide contenu dans les cuvettes de compas n'étant pas de l'eau pure, mais un mélange d'eau et d'alcool.

Mais ceci suppose que la valeur du champ est à peu près la même à tous les caps, c'est-à-dire que le compas est compensé. Si l'on essayait, en se fiant à la grandeur du moment magnétique d'un compas liquide pour assurer sa position d'équilibre malgré la faiblesse du champ, de l'employer dans le blockhaus d'un cuirassé *sans le compenser*, en utilisant un Tableau de déviation, l'entraînement du compas, à certains caps, serait 8 ou 10 fois plus grand, car le champ deviendrait à ces caps 8 à 10 fois plus petit que le champ moyen; c'est-à-dire que, malgré la grandeur du moment magnétique et le Tableau de déviations, on ne pourrait pas connaître le cap à plus de 25° ou 30° près; c'est donc pratiquement impossible, le compas ne pouvant plus rien indiquer pendant les évolutions du bâtiment.

15. L'entraînement du compas pendant les évolutions

est d'autant plus fâcheux qu'une fois le liquide en mouvement le retour du compas à sa position d'équilibre se fait beaucoup plus lentement qu'en liquide calme. C'est ce que montrent les courbes des planches X et X' qui résultent des mesures faites sur le compas Chetwynd et sur le grand compas Doignon (trait pointillé); les courbes relatives

PL. X et X'.



aux autres compas n'ont pas été reproduites. La planche X contient les courbes de retour au zéro obtenues quand, la déviation maxima ayant été atteinte à la suite d'une rotation uniforme suffisamment prolongée, on stoppe doucement l'appareil; la planche X' contient au contraire les courbes de retour au zéro en liquide calme, le compas étant dévié de sa position d'équilibre par un aimant qu'on éloigne ensuite. Ces dernières courbes montrent que l'amortissement du compas n'est pas encore l'amortis-

sement critique; au contraire, quand le liquide a subi l'entraînement de la cuvette, tout se passe, pour le retour au zéro, comme si l'amortissement critique avait été largement dépassé.

Il en résulte qu'une fois la giration terminée, le compas liquide mettra beaucoup plus de temps à donner une indication exacte que le compas Thomson, dont l'entraînement est presque entièrement dû au frottement du pivot.

16. *Conclusion.* — La conclusion générale de ce Chapitre est que les avantages qu'on pourrait attendre de l'emploi des compas liquides dans les endroits du navire où le champ magnétique est faible, à cause de leur grand moment magnétique, paraissent assez fortement balancés, en ce qui concerne la précision qu'on peut leur demander comme indicateurs pendant les évolutions, par l'entraînement qu'exerce ce liquide, mis lui-même en mouvement par les parois de la cuvette.

CHAPITRE II.

LA COMPENSATION DES COMPAS DE GRAND MOMENT MAGNÉTIQUE.

1. Nous avons vu, dans le Chapitre précédent, que, si la substitution d'un frottement liquide ou visqueux à un frottement solide a l'avantage de ne pas changer la position d'équilibre du compas, il conserve l'inconvénient de lui faire subir, pendant les évolutions, un entraînement fort appréciable. Si les compas liquides avaient un moment magnétique aussi faible que les roses Thomson, ils subiraient des déviations par entraînement comprises entre 6° et 12° pour des durées de giration supérieures à 10 minutes ou de l'ordre de 4 minutes en supposant le champ directeur égal au champ terrestre à Paris; ces déviations atteindraient 30° et 90° pour un compas placé dans un blockhaus et sous nos latitudes. Il est vrai que

les aimants seraient alors beaucoup moins lourds qu'ils ne le sont dans les compas liquides, ce qui permettrait de réduire les dimensions du flotteur; mais, à moins de dispositions spéciales assez différentes de celles qui ont été jusqu'à présent réalisées, les déviations par entraînement ne seraient pas ainsi très diminuées, car le couple de viscosité continuerait à agir sur la feuille même de la rose.

Avec des compas dont le moment magnétique est donc de l'ordre de 10 à 20 fois celui des roses Thomson, il devient évident que l'aimantation induite prise par les correcteurs de fer doux sous l'influence du compas n'est plus négligeable. On s'en aperçoit immédiatement en approchant une masse de fer doux, d'abord d'un compas Thomson, puis d'un compas liquide, en donnant naturellement les mêmes positions respectives à la masse de fer doux et aux deux compas successivement : la déviation subie par le compas liquide est beaucoup plus grande. Il peut donc sembler probable que les compas de grand moment magnétique permettront de corriger des déviations plus grandes que les compas Thomson. Mais, pour que l'emploi de cette propriété soit légitime, il faut savoir si l'action spéciale exercée par le compas sur les correcteurs, qui n'a d'équivalent dans aucune des actions exercées par le navire sur le compas, peut se combiner avec ces actions de manière à permettre une compensation exacte à tous les caps.

De plus, l'action et la réaction mutuelle des correcteurs et du compas est évidemment indépendante du champ terrestre. Il en résulte que, si la compensation est possible en un point du globe, elle ne sera *pas permanente* et devra être modifiée au cours d'une navigation pendant laquelle la valeur du champ terrestre changera notablement. C'est en grande partie pour éviter cet inconvénient que Lord Kelvin a donné à sa rose le moment magnétique le

plus faible qui fût compatible avec la sensibilité des pivots. Il est intéressant d'avoir le moyen de calculer les variations que subira la compensation par suite des changements en latitude.

A ces deux points de vue, il est nécessaire de reprendre la théorie de l'équilibre d'une rose de compas en tenant compte de l'aimantation qu'elle produit dans les correcteurs. C'est ce que nous allons faire. On trouvera d'ailleurs une étude approchée de la compensation des compas de grand magnétique dans l'Ouvrage, déjà cité, de M. Corbara : *Trattato sul magnetismo delle navi in ferro e sulle bussole marine*, 1907, p. 314 et suivantes. Mais les hypothèses sur lesquelles reposent cette théorie sont difficilement justifiables. On suppose que les aimants dont la rose est munie sont infiniment petits; or leur longueur est de l'ordre du tiers ou du quart de la distance des correcteurs. En outre, on suppose que le champ créé par le compas est uniforme dans l'espace tout entier occupé par les correcteurs, ce qui est évidemment inexact. Ce n'est pas la première fois, du reste, que cette question préoccupe les marins, et Archibald Smith et Evans avaient autrefois donné quelques indications qualitatives sur la réaction mutuelle des correcteurs de fer doux et des aiguilles longues et fortement aimantées qui étaient alors en usage dans toutes les Marines (¹).

2. Soit M (*fig.* 14) un point de coordonnées polaires u et φ par rapport à l'origine O et à l'axe Ox; ce point est supposé dans un champ magnétique dont le potentiel en M est $V(u, \varphi)$. Le moment par rapport à O de la composante du champ perpendiculaire à OM est donc

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_M$$

et, si l'on place en M une masse magnétique m , le moment

(¹) *Philosophical Transactions*, t. CLI, 1861, p. 161.

I. — Calcul du couple directeur résultant de l'aimantation des correcteurs sous l'influence du compas.

3. Il est clair que l'aimant RB, s'il était infiniment éloigné de toute masse magnétique, ne produirait sur lui-même aucune action directrice. Les seules parties de Ω qui nous intéressent sont celles qui correspondent au champ produit par l'induction de l'aimant sur les masses compensatrices.

Pour pouvoir faire ce calcul, nous supposerons que ces masses compensatrices sont des sphères. C'est d'ailleurs le cas le plus général; les compensateurs, non seulement du compas Thomson, mais de la plupart des compas liquides, sont sphériques; la raison en est que c'est la seule forme qui permette de prévoir, — autrement que par une Table empirique qui peut dépendre beaucoup pour d'autres formes de correcteurs, des propriétés magnétiques du fer qui les constitue, — l'effet des correcteurs placés dans une position donnée par rapport au compas. Les sphères employées sont généralement creuses. Soient α le rayon extérieur de la sphère A et α' son rayon intérieur, κ la susceptibilité magnétique du fer qui la constitue.

Le problème de l'induction magnétique, dans le cas d'une sphère creuse sous l'action de forces quelconques, a été complètement résolu par Poisson (¹). Il ne nous reste qu'à appliquer cette solution au cas où l'origine des forces extérieures est l'aimant RB.

Soit ω le potentiel, au point M, du champ créé par cet aimant. Nous avons

$$\omega = \frac{m}{MR} - \frac{m}{MB}.$$

(¹) *Mémoires de l'Institut*, 1824. — MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, chap. IV et V.

Développons ce potentiel suivant les puissances croissantes de $MA = r$:

$$\omega = \frac{m}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m}{(r^2 + \rho'^2 - 2r\rho' \cos \theta')^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\omega = \frac{m}{\rho} \left(P_0 + P_1 \frac{r}{\rho} + \dots + P_n \frac{r^n}{\rho^n} + \dots \right) - \frac{m}{\rho'} \left(P'_0 + P'_1 \frac{r}{\rho'} + \dots + P'_n \frac{r^n}{\rho'^n} + \dots \right).$$

P_n ou $P_n(\cos \theta)$ est le polynome de Legendre de degré n , et P'_n est le même polynome dans lequel l'angle θ' remplace l'angle θ .

Soit Ω_1 le potentiel dû au magnétisme induit dans la sphère A par le pôle R qui produit au point M le potentiel

$$\omega_1 = \frac{m}{\rho} P_0 + \frac{m}{\rho^2} P_1 r + \dots + \frac{m}{\rho^{n+1}} P_n r^n + \dots$$

Cherchons à représenter le potentiel Ω_1 par un développement en fonctions sphériques. Ce développement doit avoir trois formes différentes suivant qu'il s'applique à un point M pris à l'extérieur de la sphère, dans la masse du feuillet sphérique ou dans la cavité intérieure. A l'extérieur de la sphère, le développement ne doit contenir que des puissances négatives de r , puisque le potentiel doit être nul à l'infini; dans la cavité il ne doit pas contenir de puissances négatives, puisqu'il doit être fini pour $r = 0$; dans la masse du feuillet, il peut contenir des puissances positives et des puissances négatives. Nous poserons donc :

A l'extérieur de la sphère,

$$\Omega_1^e = A_0 P_0 \frac{1}{r} + A_1 P_1 \frac{1}{r^2} + \dots + A_n P_n \frac{1}{r^{n+1}} + \dots,$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ étant des coefficients à déterminer; dans la cavité intérieure,

$$\Omega_1^i = B_0 P_0 + B_1 P_1 r + \dots + B_n P_n r^n + \dots$$

et, dans la masse du métal,

$$\Omega_1^m = \dots + C_n P_n \frac{1}{r^{n+1}} + \dots + D_0 P_0 + D_1 P_1 r + \dots + D_n P_n r^n + \dots$$

La condition de continuité du potentiel sur la surface extérieure et sur la surface intérieure du feuillet sphérique a pour conséquence que l'on a, puisque le développement en polynômes de Legendre ne peut se faire que d'une seule manière,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{C_n}{a^{n+1}} + D_n a^n = \frac{A_n}{a^{n+1}} & \text{ou} \quad (A_n - C_n) - D_n a^{2n+1} = 0, \\ \frac{C_n}{a'^{n+1}} + D_n a'^n = B_n a'^n & \text{ou} \quad (B_n - D_n) a'^{2n+1} - C_n = 0. \end{cases}$$

De plus, les développements Ω_1^i , Ω_1^e , Ω_1^n doivent vérifier les équations suivantes :

Sur la surface extérieure du feuillet,

$$(3) \quad -(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_1^m}{dr} + \frac{d\Omega_1^e}{dr} - 4\pi\kappa \frac{d\omega_1}{dr} = 0$$

et, sur la surface intérieure du feuillet,

$$(3') \quad (1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_1^n}{dr} - \frac{d\Omega_1^i}{dr} + 4\pi\kappa \frac{d\omega_1}{dr} = 0,$$

les dérivées étant toutes prises dans le sens de r croissant.

On tire de ces équations

$$(4) \quad \begin{cases} -(n+1)A_n + (n+1)(1+4\pi\kappa)C_n \\ \quad - n(1+4\pi\kappa)a^{2n+1}D_n = 4\pi\kappa \frac{mna^{2n+1}}{\rho^{n+1}}, \\ -na'^{2n+1}B_n - (n+1)(1+4\pi\kappa)C_n \\ \quad + n(1+4\pi\kappa)a'^{2n+1}D_n = -4\pi\kappa \frac{mna'^{2n+1}}{\rho^{n+1}}. \end{cases}$$

Pour le problème qui nous occupe, le développement du potentiel à l'extérieur de la sphère nous intéresse seul; nous n'avons donc besoin que de calculer A_n . On a

$$(5) \quad A_n = -\frac{4\pi\kappa m}{\rho^{n+1}} n \frac{[2n+1+4\pi\kappa(n+1)](a^{2n+1}-a'^{2n+1})}{n(n+1)(4\pi\kappa)^2 \left[1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^{2n+1} \right] + (2n+1)^2(1+4\pi\kappa)}$$

et nous écrivons

$$A_n = -c_n m \frac{a^{2n+1}}{\rho^{n+1}} \quad (c_0 = 0),$$

de sorte que le potentiel Ω'_i est représenté par le développement

$$\begin{aligned} \Omega'_i = & -c_1 m P_1(\cos \theta) \frac{a^3}{\rho^2 r^2} - c_2 m P_2(\cos \theta) \frac{a^5}{\rho^3 r^3} - \dots \\ & - c_n m P_n(\cos \theta) \frac{a^{2n+1}}{\rho^n r^n} - \dots \end{aligned}$$

On aura exactement de même, pour le potentiel Ω'_e résultant de l'induction produite dans la sphère par le pôle B, de masse $-m$,

$$\begin{aligned} \Omega'_e = & +c_1 m P_1(\cos \theta') \frac{a^3}{\rho'^2 r^2} + c_2 m P_2(\cos \theta') \frac{a^5}{\rho'^3 r^3} + \dots \\ & + c_n m P_n(\cos \theta') \frac{a^{2n+1}}{\rho'^n r^n} + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients c sont les mêmes dans ce deuxième développement que dans le premier, puisqu'ils ne dépendent pas de ρ ni de θ .

A l'extérieur de la sphère, le développement de Ω sera donc

$$\begin{aligned} \Omega = & c_1 m a^3 \left[\frac{P_1(\cos \theta')}{\rho'^2} - \frac{P_1(\cos \theta)}{\rho^2} \right] \frac{1}{r^2} \\ & + c_2 m a^5 \left[\frac{P_2(\cos \theta')}{\rho'^3} - \frac{P_2(\cos \theta)}{\rho^3} \right] \frac{1}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

4. Il nous faut calculer $\left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right)_R$. On a

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{\partial\Omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta'} \frac{\partial\theta'}{\partial\varphi}.$$

Pour le calcul de $\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$ et de $\frac{\partial\Omega}{\partial\theta'}$ il faut se rappeler la formule

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \dots,$$

le dernier terme étant $3 P_1$ si n est pair et P_0 si n est impair ⁽¹⁾.

Si, d'autre part, on appelle α l'angle de la parallèle OA' au plan de symétrie longitudinal du navire, dirigée vers l'avant, avec la ligne qui joint le point O au centre A de la sphère et ζ le cap magnétique vrai, ces angles étant comptés suivant l'usage nautique positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, on aura, en appelant b la distance OA ,

$$r^2 = b^2 + u^2 - 2bu \cos(-\varphi + \zeta + \alpha),$$

$$u^2 = r^2 + b^2 - 2br \cos(\varepsilon + \theta) = r^2 + b^2 - 2br \cos(\varepsilon' + \theta'),$$

$$\frac{u}{\sin(\varepsilon + \theta)} = \frac{r}{\sin(\varphi - \zeta - \alpha)} = \frac{u}{\sin(\varepsilon' + \theta')}.$$

De ces relations on tire

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = - \frac{bu \sin(-\varphi + \zeta + \alpha)}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = - \frac{r^2 + u^2 - b^2}{2r^2} = \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{d\varphi} \right)_R = & + \frac{bml \sin(-\delta + \zeta + \alpha) \alpha^3}{\rho} \\ & \times \left\{ 2c_1 \left[\frac{P_1(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho'^2} - \frac{P_1(1)}{\rho^2} \right] \frac{1}{\rho^3} + 3c_2 \alpha^2 \left[\frac{P_2(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho'^3} - \frac{P_2(1)}{\rho^3} \right] \frac{1}{\rho^4} + \dots \right. \\ & \quad \left. + (n+1)c_n \alpha^{2(n-1)} \left[\frac{P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho'^{n+1}} - \frac{P_n(1)}{\rho^{n+1}} \right] \frac{1}{\rho^{n+2}} + \dots \right\} \\ & + m\alpha^3 \frac{\rho^2 + \rho'^2 - b^2}{2\rho^2} \sin(\varepsilon - \varepsilon') \\ & \times \left\{ \frac{c_1}{\rho^2 \rho'^2} P_0(\cos \varepsilon - \varepsilon') + \frac{c_2 \alpha^2}{\rho^3 \rho'^3} 3P_1(\cos \varepsilon - \varepsilon') + \frac{c_3 \alpha^4}{\rho^4 \rho'^4} [5P_2 \cos(\varepsilon - \varepsilon') + P_0] + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{c_n \alpha^{2(n-1)}}{\rho^{n+1} \rho'^{n+1}} [(2n-1)P_{n-1}(\cos \varepsilon - \varepsilon') + (2n-5)P_{n-3}(\cos \varepsilon - \varepsilon') + \dots] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir, par exemple, TODHUNTER, *The functions of Laplace, Lamé and Bessel*, chap. III.

On aura de même

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right)_B &= -\frac{bml \sin(-\delta + \zeta + \alpha)}{\rho'} \alpha^3 \\
 &\times \left\{ 2c_1 \left[\frac{P_1(1)}{\rho'^2} - \frac{P_1(\cos \varepsilon' - \varepsilon)}{\rho^2} \right] \frac{1}{\rho'^3} + 3c_2 \alpha^2 \left[\frac{P_2(1)}{\rho'^3} - \frac{P_2(\cos \varepsilon' - \varepsilon)}{\rho^3} \right] \frac{1}{\rho'^4} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (n+1)c_n \alpha^{2(n-1)} \left[\frac{P_n(1)}{\rho'^{n+1}} - \frac{P_n(\cos \varepsilon' - \varepsilon)}{\rho^{n+1}} \right] \frac{1}{\rho'^{n+2}} + \dots \right\} \\
 &+ ma^3 \frac{\rho'^2 + l^2 - b^2}{2\rho'^2} \sin(\varepsilon - \varepsilon') \\
 &\times \left\{ \frac{c_1}{\rho^2 \rho'^2} P_0(\cos \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{c_2 \alpha^2}{\rho^3 \rho'^3} 3P_1(\cos \varepsilon' - \varepsilon) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c_n \alpha^{2(n-1)}}{\rho^{n+1} \rho'^{n+1}} [(2n-1)P_{n-1}(\cos \varepsilon' - \varepsilon) + (2n-5)P_{n-3}(\cos \varepsilon' - \varepsilon) + \dots] + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Le couple directeur Γ , que la sphère, induite par l'aimant, exerce sur lui, a donc pour expression, d'après (1), et en se rappelant que $P_n(1) = 1$,

$$(6) \quad \Gamma = -\frac{M}{2l} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta Ma^3}{2} \sin(-\delta + \zeta + \alpha) \\ &\times \left\{ 2c_1 \left(\frac{1}{\rho'^6} - \frac{1}{\rho^6} \right) + 3c_2 \alpha^2 \left(\frac{1}{\rho'^8} - \frac{1}{\rho^8} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (n+1)c_n \alpha^{2(n-1)} \left(\frac{1}{\rho'^{2n+4}} - \frac{1}{\rho^{2n+4}} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{2c_1 P_1(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho^2 \rho'^2} + \frac{3c_2 \alpha^2 P_2(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho^3 \rho'^3} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(n+1)c_n \alpha^{2(n-1)} P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho^{n+1} \rho'^{n+1}} + \dots \right] \right\} \\ &+ \frac{ma^3}{2} \sin(\varepsilon - \varepsilon') \left[2 + (l^2 - b^2) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) \right] \\ &\times \left\{ \frac{c_1 P_0(\cos \varepsilon - \varepsilon')}{\rho^2 \rho'^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_n \alpha^{2(n-1)}}{\rho^{n+1} \rho'^{n+1}} [(2n-1)P_{n-1}(\cos \varepsilon - \varepsilon') + (2n-5)P_{n-3}(\cos \varepsilon - \varepsilon') + \dots] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Examinons séparément les termes généraux des trois développements en séries qui figurent ci-dessus. Nous

avons d'abord, en posant

$$\psi = -\delta + \zeta + \alpha,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{(b^2 + l^2 - 2bl \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b} \left[1 + P_1 \frac{l}{b} + \dots + P_n \frac{l^n}{b^n} + \dots \right],$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{(b^2 + l^2 + 2bl \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b} \left[1 - P_1 \frac{l}{b} + \dots + (-1)^n P_n \frac{l^n}{b^n} + \dots \right].$$

Pour abréger l'écriture, nous écrivons P_n à la place de $P_n(\cos \psi)$; toute confusion sera évitée si nous continuons, d'autre part, à employer quand il y a lieu la notation $P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon')$, qui figure dans le développement (6).

On a

$$\frac{1}{\rho^p} = \frac{1}{b^p} \left(1 + d_{1,p} \frac{l}{b} + d_{2,p} \frac{l^2}{b^2} + \dots + d_{n,p} \frac{l^n}{b^n} + \dots \right),$$

$$\frac{1}{\rho'^p} = \frac{1}{b^p} \left(1 - d_{1,p} \frac{l}{b} + d_{2,p} \frac{l^2}{b^2} + \dots + (-1)^n d_{n,p} \frac{l^n}{b^n} + \dots \right).$$

On a donc, pour l'expression du terme général de la première série qui figure dans (6),

$$-2(n+1)c_n \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2n+4}} \left(d_{1,2n+4} \frac{l}{b} + d_{3,2n+4} \frac{l^3}{b^3} + \dots + d_{2q+1,2n+4} \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots \right),$$

et le développement de cette première ligne suivant les puissances ascendantes de $\frac{l}{b}$ est

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{2c_1}{b^6} d_{1,6} + 3c_2 \frac{\alpha^2}{b^8} d_{1,8} + \dots + (n+1)c_n \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2n+4}} d_{1,2n+4} + \dots \right) \frac{l}{b} \\ & -2 \left(\frac{2c_1}{b^6} d_{3,6} + 3c_2 \frac{\alpha^2}{b^8} d_{3,8} + \dots + (n+1)c_n \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2n+4}} d_{3,2n+4} + \dots \right) \frac{l^3}{b^3} \\ & \dots \dots \dots \\ & -2 \left(\frac{2c_1}{b^6} d_{2q+1,6} + 3c_2 \frac{\alpha^2}{b^8} d_{2q+1,8} + \dots + (n+1)c_n \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2n+4}} d_{2q+1,2n+4} + \dots \right) \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots, \end{aligned}$$

que nous écrirons pour abrégé

$$- \frac{2}{b^6} \left(A_0 + A_1 \frac{l^2}{b^2} + A_2 \frac{l^4}{b^4} + \dots + A_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l}{b},$$

en posant

$$A_q = 2c_1 d_{2q+1,6} + 3c_2 \frac{a^2}{b^2} d_{2q+1,8} + \dots \\ + (n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} d_{2q+1,2n+4} + \dots$$

Passons maintenant à la seconde série qui figure dans (6). Nous avons

$$- \left(\frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{2}{b^2} \left(d_{1,2} \frac{l}{b} + d_{3,2} \frac{l^2}{b^2} + \dots + d_{2q+1,2} \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots \right),$$

puis

$$\frac{1}{(\rho\rho')^p} = \frac{1}{b^{2p}} \left(1 + f_{2,p} \frac{l^2}{b^2} + f_{4,p} \frac{l^4}{b^4} + \dots + f_{2r,p} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right).$$

Pour calculer $P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon')$, calculons d'abord $\cos(\varepsilon - \varepsilon')$. On a

$$\cos(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4l^2}{2\rho\rho'} = \frac{b^2 - l^2}{\rho\rho'} \\ = \left(1 - \frac{l^2}{b^2} \right) \left(1 + f_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + \dots + f_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right)$$

ou

$$\cos(\varepsilon - \varepsilon') = 1 + g_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + g_{4,1} \frac{l^4}{b^4} + \dots + g_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots;$$

$P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon')$ est, comme on sait, un polynôme en $\cos \varepsilon - \varepsilon'$, de degré n , égal à 1 quand $\cos \varepsilon - \varepsilon' = 1$.

Si l'on développe P_n suivant les puissances croissantes de $\frac{l}{b}$, le développement pourra donc s'écrire

$$P_n(\cos \varepsilon - \varepsilon') = 1 + h_{2,n} \frac{l^2}{b^2} + h_{4,n} \frac{l^4}{b^4} + \dots + h_{2l,n} \frac{l^{2l}}{b^{2l}} + \dots$$

Ainsi donc, le terme général de la deuxième série qui

figure dans (6) a pour expression

$$\begin{aligned} & (n+1)c_n a^{2(n-1)} \frac{2}{b^{2n+4}} \left(d_{1,2} \frac{l}{b} + \dots + d_{2q+1,2} \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots \right) \\ & \times \left(1 + f_{2,n+1} \frac{l^2}{b^2} + \dots + f_{2r,n+1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \\ & \times \left(1 + h_{2,n} \frac{l^2}{b^2} + \dots + h_{2i,n} \frac{l^{2i}}{b^{2i}} + \dots \right), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & 2(n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2n+4}} \left(s_{1,2n+4} \frac{l}{b} + s_{3,2n+4} \frac{l^3}{b^3} + \dots \right. \\ & \left. + s_{2q+1,2n+4} \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Le développement de la deuxième série de (6) suivant les puissances croissantes de $\frac{l}{b}$ sera donc

$$\frac{2}{b^6} \left(B_0 + B_1 \frac{l^2}{b^2} + B_2 \frac{l^4}{b^4} + \dots + B_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l}{b},$$

en posant

$$\begin{aligned} B_q &= 2c_1 s_{2q+1,6} + 3c_2 \frac{a^2}{b^2} s_{2q+1,8} + \dots \\ &+ (n-1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} s_{2q+1,2n+4} + \dots \end{aligned}$$

Examinons enfin la troisième série qui figure dans (6). Nous avons

$$\sin(\varepsilon - \varepsilon') = \left[1 - \left(1 + g'_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + \dots + g'_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\begin{aligned} \sin(\varepsilon - \varepsilon') &= \left(1 - 1 + g'_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + g'_{4,1} \frac{l^4}{b^4} + \dots + g'_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{g'_{2,1}} \frac{l}{b} \left(1 + \ell_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + \ell_{4,1} \frac{l^4}{b^4} + \dots + \ell_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right). \end{aligned}$$

D.

On a ensuite

$$\begin{aligned}
 & 2 + (l^2 - b^2) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) \\
 &= 2 + \left(\frac{l^2}{b^2} - 1 \right) \left(2 + 2d_{2,2} \frac{l^2}{b^2} + 2d_{4,2} \frac{l^4}{b^4} + \dots + 2d_{2r,2} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \\
 &= 2 - 2 \left[1 + (d_{2,2} - 1) \frac{l^2}{b^2} + (d_{4,2} - d_{2,2}) \frac{l^4}{b^4} + \dots + (d_{2r,2} - d_{2r-2,2}) \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right] \\
 &= -2(d_{2,2} - 1) \frac{l^2}{b^2} - 2(d_{4,2} - d_{2,2}) \frac{l^4}{b^4} - \dots - 2(d_{2r,2} - d_{2r-2,2}) \frac{l^{2r}}{b^{2r}} - \dots \\
 &= -2u_1 \frac{l^2}{b^2} - 2u_2 \frac{l^4}{b^4} - \dots - 2u_r \frac{l^{2r}}{b^{2r}} - \dots
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 & \sin(\varepsilon - \varepsilon') \left[2 + (l^2 - b^2) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) \right] \\
 & \times \frac{c_n \alpha^{2(n-1)}}{\rho^{n+1} \rho'^{n+1}} \left[(2n-1) P_{n-1}(\cos \overline{\varepsilon - \varepsilon'}) + (2n-5) P_{n-3}(\cos \overline{\varepsilon - \varepsilon'}) + \dots \right] \\
 &= -2c_n \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2n+2}} \sqrt{g'_{2,1}} \left(1 + t_{2,1} \frac{l^2}{b^2} + \dots + t_{2r,1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \\
 & \times \left(u_1 + u_2 \frac{l^2}{b^2} + \dots + u_r \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \left(1 + f_{2,n+1} \frac{l^2}{b^2} + \dots + f_{2r,n+1} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \\
 & \times \left(v_{0,n} + v_{2,n} \frac{l^2}{b^2} + \dots + v_{2r,n} \frac{l^{2r}}{b^{2r}} + \dots \right) \frac{l^3}{b^3} \\
 &= -2c_n \frac{\alpha^{2n-1}}{b^{2n+2}} \sqrt{g'_{2,1}} \left(w_{3,n} \frac{l^3}{b^3} + w_{5,n} \frac{l^5}{b^5} + \dots + w_{2q+1,n} \frac{l^{2q+1}}{b^{2q+1}} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

La troisième partie de (6) a donc pour développement, au facteur $\frac{m\alpha^3}{2}$ près,

$$-2\sqrt{g'_{2,1}} \frac{1}{b^3} \left(C_0 + C_1 \frac{l^2}{b^2} + \dots + C_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l^3}{b^3},$$

en posant

$$C_q = c_1 w_{2q+3,1} + c_2 \frac{\alpha^2}{b^2} w_{2q+3,2} + \dots + c_n \frac{\alpha^{2,n-1}}{b^{2(n-1)}} w_{2q+3,n} + \dots$$

Ainsi donc le couple directeur que nous calculons a

pour développement, suivant les puissances de $\frac{l}{b}$,

$$\Gamma = -\frac{M}{2l} \left\{ \frac{bM\alpha^3}{2} \sin \psi \left[-\frac{2}{b^6} \left(A_0 + A_1 \frac{l^2}{b^2} + \dots + A_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l}{b} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{b^3} \left(B_0 + B_1 \frac{l^2}{b^2} + \dots + B_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l}{b} \right] \right. \\ \left. - \frac{m\alpha^3}{2} 2\sqrt{\mathcal{G}'_{2,1}} \frac{1}{b^4} \left(C_0 + C_1 \frac{l^2}{b^2} + \dots + C_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l^3}{b^3} \right\}$$

ou bien

$$(7) \quad \Gamma = \frac{M^2\alpha^3}{2b^6} \sin \psi \left[A_0 - B_0 + (A_1 - B_1) \frac{l^2}{b^2} + \dots + (A_q - B_q) \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right] \\ + \frac{M^2\alpha^3}{4b^6} \sqrt{\mathcal{G}'_{2,1}} \left(C_0 + C_1 \frac{l^2}{b^2} + \dots + C_q \frac{l^{2q}}{b^{2q}} + \dots \right) \frac{l}{b}.$$

5. Ces développements sont convergents si l'on a $\frac{l}{b} < 1$, ce qui est évidemment toujours le cas dans le problème qui nous occupe. En effet, les trois parties de (6) sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$, convergentes si α est plus petit que ρ et ρ' , ce qui est le cas, et nous avons obtenu l'expression (7) en y remplaçant $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$ par leurs développements suivant les puissances croissantes de $\frac{l}{b}$, développements qui sont aussi convergents si $\frac{l}{b} < 1$.

Il résulte de là que, pour des valeurs de $\frac{l}{b}$ suffisamment petites, l'ensemble des termes qui suivent les termes de rang donné dans les deux développements qui figurent dans l'expression (7) sont négligeables par rapport à ces termes ⁽¹⁾. Si nous connaissions cette valeur de $\frac{l}{b}$, et si

(1) En effet, soit une série entière $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ convergente si $|x| < 1$. Pour $x = x_0 < 1$, la série est convergente; donc $|a_nx_0^n|$ a un maximum quand n prend toutes les valeurs entières. Soit

elle se trouvait supérieure à la valeur de $\frac{l}{b}$ correspondant au compas étudié, nous serions assurés que, en nous arrêtant dans l'expression (7) au terme d'un certain rang, tous les termes négligés seraient individuellement moindres que les termes conservés. Mais, cette recherche étant rendue trop compliquée par la forme des coefficients A, B, C, nous nous placerons à un autre point de vue. Nous calculerons numériquement la valeur des premiers termes; nous obtiendrons ainsi pour le couple directeur du compas par réaction sur la sphère une valeur approchée que nous soumettrons au contrôle de l'expérience. Si l'accord est satisfaisant, il est clair que nous serons assurés de n'avoir pas négligé, dans le développement, un terme plus important que les termes calculés.

6. Calculons donc les premiers termes des développements qui figurent dans l'expression (7). Si l'on reprend la série des transformations qui permettent de passer de (6) à (7), on constate que l'on a

$$A_0 = 2c_1 d_{1,6} + 3c_2 \frac{a^2}{b^2} d_{1,8} + \dots + (n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} d_{1,2n+4} + \dots,$$

et que, d'autre part, on a

$$d_{1,p} = pP_1, \quad d_{2,p} = pP_2 + \frac{p(p-1)}{2} P_1^2.$$

Donc

$$A_0 = \left[2.6c_1 + 3.8c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)(2n+4)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] P_1.$$

On a ensuite

$$B_0 = 2c_1 s_{1,6} + 3c_2 \frac{a^2}{b^2} s_{1,8} + \dots + (n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} s_{1,2n+4} + \dots$$

M ce maximum; si $|x| < |x_0|$ on a $|a_n x^n| < M \left(\frac{x}{x_0} \right)^n$, et, pour une valeur de x suffisamment petite, la proposition invoquée, appliquée à la série géométrique $\left(\frac{x}{x_0} \right)^n$, devient évidente.

avec

$$s_{1,2n+4} = d_{1,2} = 2P_1,$$

d'où

$$B_0 = \left[2 \cdot 2c_1 + 3 \cdot 2c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1) 2c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] P_1,$$

et par conséquent

$$A_0 - B_0 = 2P_1 \left[2^2 c_1 + 3^2 c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right].$$

On a enfin

$$C_0 = c_1 w_{3,1} + c_2 \frac{a^2}{b^2} w_{3,2} + \dots + c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} w_{3,n} + \dots$$

et

$$w_{3,n} = u_1 v_{0,n},$$

$$u_1 = d_{2,2} - 1 = 2P_2 + P_1^2 - 1 = 2(2P_1 - 1),$$

car

$$P_2 = \frac{3P_1^2 - 1}{2}.$$

D'autre part,

$$v_{0,n} = 2n - 1 + 2n - 5 + \dots + \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit donc

$$n = 2i;$$

on a

$$v_{0,n} = 4i - 1 + (i - 5 + \dots + 3) = [4i + (i - 1) + \dots + 4] - i$$

ou

$$v_{0,n} = 2i(i+1) - i = i(2i+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si

$$n = 2i+1,$$

on a

$$v_{0,n} = 4i+1 + (i-3+\dots+1) = [4i+1 + 4(i-1) + \dots + 4] + i+1$$

ou

$$v_{0,n} = 2i(i+1) + i+1 = (i+1)(2i+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi donc, dans tous les cas,

$$\omega_{3,n} = (2P_1^2 - 1)n(n+1),$$

d'où

$$C_0 = \left[2c_1 + 2.3c_2 \frac{a^2}{b^2} + 3.4c_3 \frac{a^3}{b^3} + \dots \right. \\ \left. + n(n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] (2P_1^2 - 1).$$

De plus, on a

$$g'_{2,1} = -2g_{2,1} = -2(f_{2,1} - 1) = -2(2d_{2,1} - d_{1,1}^2 - 1)$$

ou

$$g'_{2,1} = -2(2P_2 - P_1^2 - 1) = -2(2P_1^2 - 2) = (1 - P_1^2) = 4 \sin^2 \psi,$$

d'où

$$\sqrt{g'_{2,1}} = 2 \sin \psi.$$

Si l'on se rappelle enfin que

$$P_1 = \cos \psi,$$

de sorte que

$$2P_1^2 - 1 = 2 \cos^2 \psi - 1 = \cos 2\psi,$$

l'expression des deux premiers termes du développement, suivant les puissances croissantes de $\frac{l}{b}$, du couple directeur du compas par réaction sur la sphère, est finalement

$$\Gamma = \frac{M^2 a^3}{b^6} \sin \psi \cos \psi \left[2^2 c_1 + 3^2 c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] \\ + \frac{M^2 a^3}{2b^6} \sin \psi \cos 2\psi \left[2c_1 + 2.3c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + n(n+1)c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] \frac{l}{b}$$

ou

$$(8) \quad \Gamma = \frac{M^2 a^3}{b^6} \sin \psi \left(P \cos \psi + Q \cos 2\psi \frac{l}{b} \right),$$

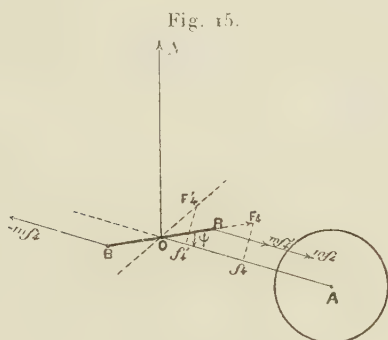
en posant

$$P = 2^2 c_1 + 3^2 c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots, \\ Q = c_1 + 3c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots$$

7. L'expression (8) est susceptible d'une représentation géométrique simple. Supposons qu'on porte, dans la direction de l'axe magnétique de l'aimant, un vecteur constant F_4 défini en grandeur par l'égalité

$$F_4 = \frac{M a^3}{b^5} P.$$

Ce vecteur aura, suivant la direction OA (fig. 15) qu;



joint le milieu de l'aimant au centre de la sphère, une composante f_4 ; on aura

$$f_4 = F_4 \cos \psi = \frac{M a^3}{b^5} P \cos \psi.$$

Imaginons que, dans la région occupée par l'aimant, il existe un champ uniforme, défini en grandeur et direction pour chaque position de l'aimant par le vecteur f_4 ; il produirait sur l'aimant un couple égal

$$2 m f_4 l \sin \psi$$

ou

$$\frac{M^2 a^3}{b^5} P \sin \psi \cos \psi.$$

C'est précisément le premier terme de l'expression (8).

Le second terme peut se représenter d'une manière analogue, quoique un peu moins simple. Supposons que la

direction symétrique de OA par rapport à l'axe magnétique de l'aimant porte un vecteur F'_4 tel que

$$F'_4 = \frac{M\alpha^3}{b^6} Q \frac{l}{b}.$$

Projetons-le sur la direction OA. Cette projection est

$$f'_4 = \frac{l}{b} \frac{M\alpha^3}{b^6} Q \cos 2\psi.$$

Un champ uniforme équipollent à ce dernier vecteur produira un couple précisément égal au second terme de l'expression (8) :

$$\frac{M^2\alpha^3}{b^6} \frac{l}{b} Q \sin \psi \cos 2\psi.$$

Si l'on calcule les termes qui suivent immédiatement les deux premiers, dans le développement (7), on constate sans peine qu'ils ne sont pas susceptibles d'une représentation géométrique simple.

Ainsi donc, au cas où l'aimant est assez court pour que, dans le couple exercé sur lui par une sphère de fer doux qu'il aimante, l'ensemble des termes qui dépendent du rapport du carré de la demi-longueur de l'aimant à la distance de son milieu au centre de la sphère soit négligeable, nous avons l'énoncé suivant :

Le couple Γ correspondant à une position donnée du compas est identique à celui qu'exercerait un champ uniforme égal à la somme de deux vecteurs qui sont, pour chaque position du compas, les projections, sur la ligne qui joint le centre du compas à celui de la sphère, de deux vecteurs constants :

1° $\frac{M\alpha^3}{b^6} P$, dirigé suivant l'axe magnétique du compas ;

2° $\frac{M\alpha^3}{b^6} \frac{l}{b} Q$, dirigé suivant la symétrique de la demi-

droite allant du centre du compas au centre de la sphère, par rapport à l'axe magnétique du compas.

8. Dans la pratique habituelle de la compensation des compas, on emploie deux sphères compensatrices symétriquement placées par rapport au compas. Les couples que la seconde sphère produit sur le compas se déduisent des précédents en changeant ψ en $\psi + \pi$. Les couples indépendants de $\frac{l}{b}$ s'ajoutent, puisque $\sin \psi$ et $\cos \psi$ changent de signe en même temps, tandis que les couples dépendant de $\frac{l}{b}$ se retranchent. Aux termes du second ordre près au moins en $\frac{l^2}{b^2}$, le couple exercé sur le compas par les sphères induites est donc

$$2M^2 \frac{a^3}{b^6} P \sin \psi \cos \psi$$

et le vecteur F_4 est

$$F_4 = 2M^2 \frac{a^3}{b^6} P.$$

9. Il est facile de se rendre compte, d'ailleurs, que, si l'on n'employait qu'une seule sphère, la part revenant au vecteur F_4 serait négligeable. Ce calcul ne sera pas inutile, puisque nous nous proposons, finalement, d'arriver à une vérification numérique de l'énoncé ci-dessus.

Les coefficients c , qui figurent dans les développements de P et de Q , sont tous moindres que 1 et croissent à partir du premier. On a, en effet, d'après (5),

$$c_n = 4\pi\kappa n \frac{|2n+1 + 4\pi\kappa(n-1)| \left[1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^{2n+1}\right]}{n(n+1)(4\pi\kappa)^2 \left[1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^{2n+1}\right] + (2n+1)^2(1 + 4\pi\kappa)}$$

ou bien, en divisant le numérateur et le dénominateur

par

$$c_n = \frac{(4\pi\kappa)^2(n+1)n \left[1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^{2n+1} \right],}{1 + \frac{2n+1}{n+1} \frac{1}{4\pi\kappa} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{4\pi\kappa} \right) \frac{1}{4\pi\kappa} \left[1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^{2n+1} \right]}}.$$

Or, on a

$$\frac{2n+1}{n} \left(1 + \frac{1}{4\pi\kappa} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^{2n+1}} > 1.$$

D'autre part, on a, en posant

$$p = \left(1 + \frac{1}{4\pi\kappa} \right) \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{1}{1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^{2n+1}},$$

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1 + \frac{2n+1}{n+1} \frac{1}{4\pi\kappa}}{1 + \frac{2n-1}{n} \frac{1}{4\pi\kappa}} \cdot \frac{1 + \frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} p}{1 + \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} p}.$$

Si l'on écrit que ce rapport est plus grand que 1, on obtient l'inégalité

$$n(n-1) \frac{1}{4\pi\kappa} + np + (4n^2-1) \frac{p}{4\pi\kappa} > 0,$$

qui est évidemment vérifiée pour toutes les valeurs de n positives et supérieures ou égales à 1.

Il résulte de là qu'on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 \left[2^2 + 3^2 \frac{\alpha^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] \\ < P < 2^2 + 3^2 \frac{\alpha^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots, \\ c_1 \left[1 + 3 \frac{\alpha^2}{b^2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \right] \\ < Q < 1 + 3 \frac{\alpha^2}{b^2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \frac{\alpha^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots \end{array} \right.,$$

d'où

$$\begin{aligned} & 2^2 + 3^2 x + \dots + (n+1)^2 x^{n-1} + \dots \\ &= \frac{1}{x} \frac{1+x}{(1-x)^3} - \frac{1}{x} = \frac{4x - 3x^2 + x^3}{x(1-x)^3}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots \\ &= (1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \dots + n^2 x^{n-1} + \dots) \\ &+ (2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots), \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = 1,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & 1 + 3x + \dots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} + \dots \\ &= \frac{1+x}{2(1-x)^3} + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Les deux inégalités (9) s'écrivent donc

$$\begin{aligned} c_1 \frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} &< P < \frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3}, \\ c_1 \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} &< Q < \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Nous voulons, par exemple, comparer P et Q; nous aurons une limite supérieure du rapport $\frac{Q}{P}$ en prenant

$$\frac{1}{c_1 \left(4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\right)}$$

et du rapport

$$\frac{F'_4}{F_4}$$

en prenant

$$\frac{1}{c_1 \left(4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\right)} \frac{1}{b}.$$

Pour calculer c_1 il faut connaître α . Or les globes réellement employés sont en fonte douce, recuite pour supprimer, autant que possible, tout magnétisme permanent. Pour les champs compris entre 0 et 3,4 C.G.S., on a trouvé que la susceptibilité α pouvait être représentée par une formule à deux termes

$$\alpha = \alpha + \beta H \quad (1),$$

et, pour la fonte, on a

$$\alpha = 3,16, \quad \beta = 0,236.$$

Nous pouvons donc, pour le champ terrestre, voisin de 0,2 à Paris, prendre

$$\alpha = 3,2.$$

Supposons maintenant qu'on veuille calculer la limite supérieure de $\frac{F'_4}{F_4}$ pour une aiguille de longueur totale égale à 10^{cm} (les aiguilles les plus longues des roses Thomson ont une longueur de 8^{cm},5), sur laquelle agit un globe réglementaire de 216^{mm} de diamètre et de 11^{mm} d'épaisseur, placé de telle manière que son centre soit à 26^{cm} du centre de l'aiguille. On a

$$\begin{aligned} a = 10,8, \quad a' = 9,7, \quad b = 26, \quad l = 5, \quad \alpha = 3,2, \\ c_1 = \frac{1 + \frac{3}{8\pi 3,2}}{1 + \frac{9}{8\pi 3,2} \left(1 + \frac{1}{4\pi 3,2}\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{9,7}{10,8}\right)^3}} = \frac{1,0373}{1,4175} = 0,7317, \\ 4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} = 3,51215 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$c_1 \frac{1}{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}} \frac{l}{b} = \frac{.5}{0,7317 \times 3,51215 \times 26} = 0,075.$$

(1) WINKELMANN, *Handbuch der Physik*, t. V (*Elektrizität und Magnetismus*), p. 198, 235.

Ainsi donc, quand $\psi = \frac{\pi}{2}$ et que le champ f_4 égal à $\frac{Ma^3}{b^3} P \cos \psi$ est nul, le champ f'_4 égal à $\frac{Ma^3}{b^3} \frac{l}{b} Q \cos 2\psi$ est moindre, en valeur absolue, que les 0,075 de la valeur maxima que peut prendre le premier. Comme ce dernier champ est de l'ordre de grandeur du champ terrestre, l'expérience le montre, et qu'un champ dix fois moindre, l'expérience le montre aussi, ne crée qu'un couple du même ordre que le couple de frottement de la chape sur le pivot, on est certain qu'au même degré d'approximation, le couple correspondant au vecteur F'_4 est toujours négligeable (¹).

II. — Calcul du couple directeur résultant du champ terrestre et du magnétisme qu'il induit dans les correcteurs.

10. Ce calcul et son résultat ne sont pas nouveaux. On les trouvera en particulier dans *Description et usage des instruments nautiques* du commandant Guyou, en prenant comme point de départ qu'un champ uniforme d'intensité H transforme une sphère pleine ou creuse en un aimant infiniment petit de moment magnétique $ka^3 H$, k étant un coefficient qui dépend de la susceptibilité magnétique α et de l'épaisseur de la sphère, mais qui, avec des sphères dont l'épaisseur est au moins égale au $\frac{1}{10}$ du rayon, peut être considéré comme égal à 1. De plus, on suppose le compas formé d'aiguilles infiniment courtes.

Nous allons reprendre ce calcul en employant la même méthode qu'au paragraphe précédent, ce qui nous donnera d'une manière précise les limites dans lesquelles cette hypothèse est légitime et en même temps la valeur

(¹) Remarquons en passant que les valeurs de α plus grandes que celle que nous avons adoptée accentueraient la conclusion précédente en augmentant la valeur de c_1 .

exacte du moment magnétique de la sphère soumise à l'induction terrestre.

Soient u_1 et u_2 les valeurs au point M (*fig. 14*) des potentiels relatifs au champ magnétique terrestre et au champ produit par la sphère, aimantée sous l'influence de ce champ. Nous avons (§ 2)

$$U = u_1 + u_2$$

et

$$u_1 = -Hx = -H[b \cos(\zeta + \alpha) + r \cos(\overline{Ox, AM})]$$

ou

$$u_1 = -Hb \cos(\zeta + \alpha) P_0 - Hr P_1(\cos \overline{Ox, AM}),$$

P_0 et P_1 étant les deux premiers polynômes de Legendre,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos(\overline{Ox, AM}).$$

Le potentiel u_2 n'aura pas la même représentation à l'extérieur de la sphère, dans la masse du métal et dans la cavité. Nous aurons, comme au paragraphe 3,

$$u_2^e = \lambda_0 P_0 \frac{1}{r} + \lambda_1 P_1 \frac{1}{r^2} + \dots + \lambda_n P_n \frac{1}{r^{n+1}} + \dots,$$

$$u_2^i = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 r + \dots + \mu_n P_n r^n + \dots,$$

$$u_2^m = \dots + \nu_n P_n \frac{1}{r^{n+1}} + \dots + \xi_0 P_0 + \xi_1 P_1 r + \dots + \xi_n P_n r^n + \dots$$

Les conditions de continuité du potentiel sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de la sphère se traduisent par les équations (2), où l'on remplace A, B, C, D par λ , μ , ν , ξ .

Les équations (3) et (3'), dans lesquelles on remplace ω , par u_1 , nous donnent

$$-(n+1)\lambda_n + (n+1)(1+4\pi\kappa)\nu_n - n(1+4\pi\kappa)\alpha^{2n+1}\xi_n = 0$$

pour $n \neq 1$,

$$\begin{aligned} & -(n+1)\lambda_n + (n+1)(1+4\pi\kappa)\nu_n - n(1+4\pi\kappa)\alpha^{2n+1}\xi_n \\ & = -4\pi\kappa H\alpha^3 \end{aligned}$$

pour $n = 1$,

$$-n\alpha'^{2n+1}\mu_n - (n+1)(1+4\pi\kappa)\nu_n + n(1+4\pi\kappa)\alpha'^{2n+1}\xi_n = 0$$

pour $n \neq 1$.

$$\begin{aligned} & -n\alpha'^{2n+1}\mu_n - (n+1)(1+4\pi\kappa)\nu_n + n(1+4\pi\kappa)\alpha'^{2n+1}\xi_n \\ & = 4\pi\kappa H\alpha'^3 \end{aligned}$$

pour $n = 1$.

Ces équations nous conduisent, par application de la formule (5), à

$$\lambda_n = 0, \quad n \neq 1, \quad \lambda_1 = c_1 H\alpha^3.$$

c_1 ayant la même signification que ci-dessus.

On a donc

$$u_2 = \frac{c_1 H\alpha^3}{r^2} P_1(\cos \overline{Ox, AM}) = \frac{c_1 H\alpha^3}{r^2} \cos(Ox, AM)$$

et

$$U = -Hb \cos(\zeta + \alpha) - H\left(r - c_1 \frac{\alpha^3}{r^2}\right) \cos(Ox, AM).$$

11. La direction Ox jouant ici un rôle spécial, il sera préférable, au lieu d'employer les coordonnées polaires r et θ , d'employer les coordonnées cartésiennes x et y , l'axe Oy étant dirigé vers l'Est magnétique. Nous avons évidemment

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -x \frac{\partial U}{\partial y} + y \frac{\partial U}{\partial x},$$

les deux membres représentant le moment, par rapport à O , de la force qu'exerce le champ dérivant du potentiel U sur une masse $+1$ placée au point M . On aura donc

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = u \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial y} - u \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial x}$$

et

$$\begin{aligned} & -\frac{M}{2l} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_R - \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_R \right] \\ & = -\frac{M}{2l} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_R + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_R \right] \cos \delta - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_R + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_R \right] \sin \delta \right\}. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$x = b \cos(\zeta + \alpha) + r \cos(Ox, AM);$$

donc

$$U = -bH \cos(\zeta + \alpha) - H \left(1 - c_1 \frac{a^3}{r^3}\right) [x - b \cos(\zeta + \alpha)].$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -H \left(1 - c_1 \frac{a^3}{r^3}\right) - 3c_1 \frac{Ha^3}{r^4} (x - b \cos \overline{\zeta + \alpha}) \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -3c_1 \frac{Ha^3}{r^4} (x - b \cos \overline{\zeta + \alpha}) \frac{\partial r}{\partial y}; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$r^2 = [x - b \cos(\zeta + \alpha)]^2 + [y - b \sin(\zeta + \alpha)]^2;$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x - b \cos(\zeta + \alpha)}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y - b \sin(\zeta + \alpha)}{r}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_R &= -H \left(1 - c_1 \frac{a^3}{\rho^3}\right) - 3c_1 H \frac{a^3}{\rho^4} [l \cos \delta - b \cos(\zeta + \alpha)]^2, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_B &= -H \left(1 - c_1 \frac{a^3}{\rho'^3}\right) - 3c_1 H \frac{a^3}{\rho'^4} [l \cos \delta + b \cos(\zeta + \alpha)]^2, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_R &= -3c_1 H \frac{a^3}{\rho^4} [l \sin \delta - b \sin(\zeta + \alpha)] [l \cos \delta - b \cos(\zeta + \alpha)], \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_B &= -3c_1 H \frac{a^3}{\rho'^4} [l \sin \delta + b \sin(\zeta + \alpha)] [l \cos \delta + b \cos(\zeta + \alpha)]. \end{aligned}$$

Le couple directeur Γ' résultant des causes actuellement analysées a donc pour expression

$$\begin{aligned} \Gamma' = -\frac{M}{2} \left\{ 2H \sin \delta - c_1 H a^3 \left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho'^3} \right) \sin \delta \right. \\ \left. + 3c_1 H a^3 \frac{b}{\rho^4} \sin \psi [l \cos \delta - b \cos(\zeta + \alpha)] \right. \\ \left. - 3c_1 H a^3 \frac{b}{\rho'^4} \sin \psi [l \cos \delta + b \cos(\zeta + \alpha)] \right\}, \end{aligned}$$

D.

ou encore

$$\begin{aligned}\Gamma' = & -MH \sin \delta + \frac{Mc_1 H}{2} a^3 \sin \delta \left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho'^3} \right) \\ & - \frac{3}{2} c_1 MH a^3 b l \sin \psi \cos \delta \left(\frac{1}{\rho^5} - \frac{1}{\rho'^5} \right) \\ & + \frac{3}{2} c_1 MH a^3 b^2 \sin \psi \cos (\zeta + \alpha) \left(\frac{1}{\rho^5} + \frac{1}{\rho'^5} \right).\end{aligned}$$

En employant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho'^3} &= \frac{2}{b^3} \left(1 + d_{2,3} \frac{l^2}{b^2} + \dots + d_{2n,3} \frac{l^{2n}}{b^{2n}} + \dots \right), \\ \frac{1}{\rho^5} + \frac{1}{\rho'^5} &= \frac{2}{b^5} \left(1 + d_{2,5} \frac{l^2}{b^2} + \dots + d_{2n,5} \frac{l^{2n}}{b^{2n}} + \dots \right), \\ \frac{1}{\rho^5} - \frac{1}{\rho'^5} &= \frac{2}{b^5} \left(d_{1,5} \frac{l}{b} + d_{3,5} \frac{l^3}{b^3} + \dots + d_{2n+1,5} \frac{l^{2n+1}}{b^{2n+1}} + \dots \right).\end{aligned}$$

Si nous substituons ces développements dans l'expression de Γ' et si nous ordonnons le résultat suivant les puissances ascendantes de $\frac{l}{b}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(10) \quad \Gamma' = & MH \left[-\sin \delta + c_1 \frac{a^3}{b^3} \sin \delta + 3 c_1 \frac{a^3}{b^3} \sin \psi \cos (\zeta + \alpha) \right] \\ & + c_1 MH \frac{a^3}{b^3} \frac{l^2}{b^2} \left\{ d_{2,3} \sin \delta - 3 d_{1,5} \sin \psi \cos \delta + 3 d_{2,5} \sin \psi \cos (\zeta + \alpha) \right. \\ & \quad + \dots \dots \dots \\ & \quad + [d_{2n,3} \sin \delta - 3 d_{2n-1,5} \sin \psi \cos \delta \\ & \quad \quad \quad + 3 d_{2n,5} \sin \psi \cos (\zeta + \alpha)] \frac{l^{2n-1}}{b^{2(n-1)}} \\ & \quad \quad \quad \left. + \dots \dots \dots \right\}.\end{aligned}$$

12. Nous arrivons donc à ce résultat : le développement de Γ' ne comprend que les puissances paires de $\frac{l}{b}$. On voit ainsi que la valeur obtenue pour Γ' , en limitant le développement au premier terme, est valable non seulement quand la demi-longueur des aiguilles du compas, l , est très petite par rapport à la distance b du centre du

compas au centre de la sphère, mais même quand c'est l^2 qui est très petit devant b^2 ; ceci étend évidemment beaucoup le champ dans lequel on a le droit de considérer comme légitime l'application de la formule simplifiée, qui se trouve être exacte, non seulement aux quantités petites du premier ordre près, comme on pouvait s'y attendre, mais même aux quantités petites du second ordre près.

Le premier terme du développement de Γ' peut aussi s'écrire

$$MH \left\{ \left(c_1 \frac{a^3}{b^3} - 1 \right) \sin \delta + 3 c_1 \frac{a^3}{b^3} \cos(\zeta + \alpha) \right. \\ \left. \times [\sin(\zeta + \alpha) \cos \delta - \cos(\zeta + \alpha) \sin \delta] \right\}$$

ou

$$-MH(X \sin \delta - Y \cos \delta) = 2m H(l Y \cos \delta - l X \sin \delta),$$

en posant

$$X = 1 + c_1 \frac{a^3}{b^3} [3 \cos^2(\zeta + \alpha) - 1],$$

$$Y = 3 c_1 \frac{a^3}{2 b^3} \sin 2(\zeta + \alpha).$$

Sous cette forme, on voit que le couple Γ' est la résultante de deux couples que produisent sur l'aimant un champ HX parallèle à Ox et un champ HY parallèle à Oy . On peut d'ailleurs mettre X et Y sous la forme suivante :

$$X = 1 + c_1 \frac{a^3}{2 b^3} [3 \cos 2(\zeta + \alpha) + 1] \\ = 1 + c_1 \frac{a^3}{2 b^3} + c_1 \frac{3 a^3}{2 b^3} \cos 2\alpha \cos 2\zeta - c_1 \frac{3 a^3}{2 b^3} \sin 2\alpha \sin 2\zeta, \\ Y = c_1 \frac{3 a^3}{2 b^3} \cos 2\alpha \sin 2\zeta + c_1 \frac{3 a^3}{2 b^3} \sin 2\alpha \cos 2\zeta,$$

qui fait voir immédiatement qu'au champ terrestre s'ajoute, au centre du compas, et par induction magnétique dans la sphère, un champ que l'on peut considérer

comme la résultante de trois vecteurs, constants en grandeur :

1° Un vecteur $c_1 \frac{3a^3}{2b^3}$ dirigé suivant Ox , parallèle au champ terrestre;

2° Un vecteur $c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \cos 2\alpha$ dirigé suivant ON' symétrique de ON (ou x) par rapport au plan vertical contenant la ligne de foi, ON ⁽¹⁾;

3° Un vecteur $c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \sin 2\alpha$ dirigé suivant OE' faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec ON' .

C'est, dans le cas particulier où les fers doux placés en présence du compas sont constitués par une sphère (pleine ou creuse), le théorème du commandant Guyou.

III. — Vérifications expérimentales.

13. Pour vérifier séparément l'existence des couples définis au paragraphe 7 et l'exactitude des expressions qui en sont données en les rattachant aux vecteurs F_4 et F'_4 , dirigés suivant l'axe magnétique du compas, il faudrait faire tourner une sphère de fer (creuse) autour d'un aimant de moment magnétique M suspendu horizontalement par un fil de torsion, de telle sorte que son axe fût dans le plan horizontal passant par le centre de la sphère, après avoir eu soin de disposer à une distance convenable des aimants fixes annulant le champ terrestre dans tout l'espace où la sphère serait déplacée. Pour vérifier ensuite les résultats indiqués au paragraphe 12, il faudrait prendre un aimant de très faible moment magnétique et observer les déviations qu'il subit par rapport à sa direction initiale, parallèle au champ terrestre, quand on fait tourner

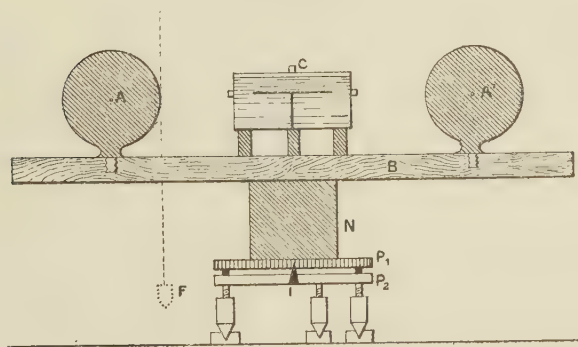
(¹) Cette ligne est simplement ici définie comme une direction fixe par rapport à la ligne OA avec laquelle elle fait l'angle α .

autour de lui la sphère perturbatrice. La faiblesse du couple directeur agissant dans cette expérience sur le magnétomètre, à cause de son faible moment magnétique, obligerait évidemment à le suspendre comme ci-dessus, mais par un fil de cocon.

Au lieu de procéder de cette manière, on peut prendre un compas de moment magnétique M et faire tourner la sphère autour de lui dans le champ terrestre, ou bien, ce qui revient au même, installer sur un même support sphère et compas, et faire tourner le support comme s'il était un navire faisant au mouillage un tour d'horizon. Pour chaque position du support, comme pour chaque cap du navire, on mesure la déviation et on la compare à celle que permet de calculer l'équation d'équilibre de la rose; cette équation est obtenue en égalant à zéro la somme des couples agissants.

14. L'appareil était disposé de la manière suivante : Sur le plateau N (*fig. 16*), muni de roulements à billes

Fig. 16.



et de vis calantes, qui nous avait déjà servi pour étudier l'entraînement des roses de compas liquides (*voir plus haut*), on disposait une forte planche B , en chêne, épaisse de 5^{cm} environ, large de 12^{cm} et longue de 100^{cm}, destinée

à supporter les sphères A et A'. Elle était pourvue d'une rainure longitudinale ayant la largeur des tiges filetées que possèdent sous leur collet les sphères réglementaires, et permettant à ces sphères de reposer sur la partie plate du collet; cette rainure servait en même temps à guider le déplacement des sphères quand on les rapprochait ou qu'on les éloignait. Sur la face supérieure de la planche B était collée une échelle millimétrique en papier dont le zéro était placé par tâtonnement sur l'axe de rotation de l'appareil; il n'y avait du reste aucune nécessité à ce que ce réglage, de pure commodité, fût rigoureusement réalisé. L'échelle était d'ailleurs symétrique par rapport à son zéro.

On plaçait vers le milieu de la planche B trois cales de bois dont la hauteur était telle qu'une fois les sphères installées, leurs centres se trouvaient dans le même plan horizontal que les aiguilles; on verra plus loin comment il était possible de déterminer, sans démonter le compas, la distance de ce plan à la pointe du pivot, dont la cote était définie extérieurement par les tourillons de la suspension à la Cardan.

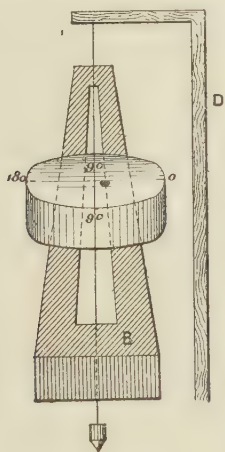
Le compas était alors placé sur ces cales d'une manière quelconque, assez au milieu cependant pour qu'en mettant ensuite les sphères de part et d'autre, symétriquement, la stabilité fût assurée. On pouvait, pour cela, s'aider au besoin d'un fil à plomb passant par la rainure de la planche B et qu'on amenait au contact successivement de chacun des côtés du compas; le fil devait traverser la face supérieure de B à la hauteur de deux divisions portant les mêmes numéros.

15. Nous nous sommes proposé de vérifier la théorie qui a été faite ci-dessus dans le cas qui se présente le plus souvent dans la pratique : celui où les globes compensateurs sont placés symétriquement par rapport au plan de symétrie longitudinale du navire, qui contient aussi deux

traits verticaux diamétralement opposés, tracés intérieurement sur la cuvette du compas et qui définissent ce qu'on appelle la *ligne de foi*.

Pour rendre la *ligne de foi* perpendiculaire à l'axe de la planche B, on utilisait la graduation en degrés que porte la couronne métallique assurant la fermeture du couvercle; cette graduation va de 0 à 180 de part et d'autre du diamètre situé dans le plan vertical de la ligne de foi. Après avoir réglé la potence D, qui porte le fil à plomb, de manière que le fil passe par le milieu de la rainure de la planche B, comme l'indique la figure 17, on déplace le

Fig. 17.



compas (en le laissant à peu près entre les mêmes divisions de l'échelle placée sur B) de façon qu'en regardant le fil à plomb se projeter au milieu de la rainure on voie aussi ce fil passer sur deux divisions de la graduation portant le même numéro.

Ce procédé extrêmement simple ayant permis d'assurer un réglage de la ligne de foi avec une précision de l'ordre

de $0^{\circ},3$, il a été jugé inutile de construire un dispositif plus perfectionné.

Une fois ce réglage effectué, on fait tourner l'ensemble jusqu'à ce que la ligne de foi soit au nord du compas. On fixe alors sur la tranche du plateau inférieur P_2 un index aigu I, dont la pointe se projette sur la division zéro de la graduation en degrés que porte la tranche du plateau mobile P_1 . Si cette graduation a été faite dans un sens convenable, ses numéros indiquent alors, bien évidemment, les caps magnétiques vrais de la ligne de foi (ces caps magnétiques étant naturellement rapportés au champ magnétique uniforme dans lequel on opère et qui n'a pas besoin d'être rigoureusement le champ terrestre).

Pour placer les globes, on commence par mettre un support sous la planche B du côté où l'on veut mettre le premier globe; on place ce globe, puis on place le second globe sensiblement dans la position qu'il doit occuper et l'on enlève le support placé sous la planche B. L'équilibre de l'appareil reste assuré, même quand l'un des globes est plus éloigné du compas que l'autre d'une dizaine de centimètres.

16. Pour vérifier la théorie dans le cas qui vient d'être spécifié, il faut s'arranger de manière que le milieu de l'axe magnétique du compas soit au milieu de la ligne qui joint les centres des sphères. Il faut, de plus, que ces sphères soient dépourvues de tout magnétisme permanent. On s'assure que cette condition est réalisée en faisant tourner successivement chacune d'elles de 360° sur elle-même, sans changer sa distance au compas, qu'on laisse, pendant cette opération, dans le même azimut. Quand les sphères de fonte douce qui sont en usage ont été recuites, au besoin plusieurs fois, cette opération ne fait pas varier l'indication du compas de plus de $0^{\circ},5$. Encore cette variation peut-elle être attribuée à une légère variation de la distance de la sphère au centre du compas.

Une variation de $0^{\text{mm}},5$ sur cette distance correspond, on le verra d'après nos résultats, à une déviation maxima de l'ordre de $0^{\circ},5$.

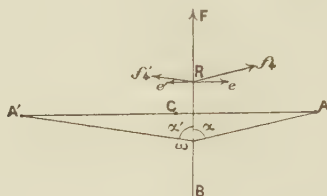
Le réglage du centre magnétique du compas s'est trouvé être, du moins avec le compas à liquide que nous avons étudié (compas Doignon, breveté S. G. D. G., rose de 20^{cm}), une opération assez délicate.

Nous pensions d'abord, en effet, que le centre magnétique du compas était sur la verticale du pivot, axe géométrique de tout l'appareil. Il est clair, d'ailleurs, qu'il faut pour cela que cet axe ne contienne pas le centre de gravité de la rose. Celle-ci prendrait alors, sous l'influence de la composante verticale du champ terrestre, agissant sur un moment magnétique important ($M = 2300$), et de la poussée hydrostatique, une inclinaison gênante. Il faut, de plus, que les aimants constituant l'équipage magnétique et placés symétriquement de part et d'autre du pivot aient exactement le même moment magnétique deux à deux, sans quoi l'axe magnétique résultant ne rencontrera pas l'axe de symétrie géométrique de la rose.

En fait, la rose dont nous nous sommes servis ne remplissait pas ces conditions. Voici ce qui le prouve. En employant le procédé indiqué au paragraphe 15, on plaçait le compas de manière que son axe géométrique fût dans le plan vertical passant par le milieu de la rainure de B. La ligne de foi étant dirigée vers un des caps cardinaux, les globes n'auraient dû apporter aucune déviation au compas. Or au Nord, par exemple, ils produisaient une déviation qui atteignait 10° quand les globes étaient au contact du compas et qui diminuait, quand on les éloignait, jusqu'à environ 1° pour $b = 30$. À l'Est et à l'Ouest les déviations étaient toujours moindres, ne dépassant pas 2° ; au Sud elles étaient du même ordre qu'au Nord. Avec une rose Thomson, ces déviations anormales ne dépassaient jamais $0^{\circ},5$.

Voici l'interprétation que nous donnons de ce phénomène. Soient A et A' les centres des sphères (*fig.* 18), C l'axe géométrique du compas au milieu de AA', ω le centre magnétique du compas; nous supposons que AA'

Fig. 18.



est orienté Est-Ouest. Quand l'axe magnétique BR est dirigé vers le Nord, le pôle R est placé dans un champ qui est la somme :

1° D'un vecteur F dirigé vers le Nord ;

2° D'un vecteur f_4 parallèle à ωA et égal à $\frac{Ma^3}{\omega A^3} P \cos \alpha$,

et d'un vecteur f'_4 parallèle à $\omega A'$ et égal à $\frac{Ma^3}{\omega A'^3} P' \cos \alpha'$;

3° D'un vecteur e parallèle à A'A et égal à $c_1 \frac{3a^3}{\omega A} H \sin 2\alpha$,

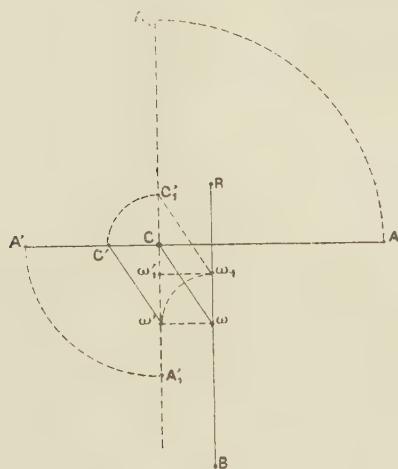
et d'un vecteur e' parallèle à AA' et égal à $c_1 \frac{3a'^3}{\omega A'} H \sin 2\alpha'$.

Si $\omega A < \omega A'$, il est clair que l'axe magnétique BR ne restera pas orienté vers le Nord; le compas accusera donc une déviation. Raisonnement analogue pour les différents caps cardinaux.

Mais supposons qu'on déplace la sphère A, qui, sur la figure, est la plus rapprochée de l'axe magnétique quand il est dirigé vers le Nord, jusqu'à ce qu'elle soit à la même distance de cet axe que la sphère A' (*fig.* 19). La déviation au Nord sera évidemment annulée. Supposons maintenant qu'on fasse tourner l'appareil de façon à orienter la ligne de foi vers l'Ouest, par exemple. On peut supposer

que cette rotation est effectuée autour d'un axe passant exactement par le centre géométrique C du compas, puisque les angles dont tourne le système AA' influent seuls

Fig. 19.



sur les indications de la rose. Les points A et A' viennent alors en A₁ et A'₁. Dans ce mouvement, d'ailleurs, la figure CωR reste évidemment indéformable. Si donc, à l'Ouest, il n'y avait pas de déviation, le point ω occuperait la même position que lorsque la ligne de foi est orientée au Nord. Mais alors il est clair, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus, que la résultante des forces agissant sur le pôle R ne sera pas parallèle à A₁A'₁, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que la déviation est nulle.

Mais faisons subir au compas une translation perpendiculaire à la ligne des centres. Cette translation étant effectuée quand cette ligne est dans la position A, A' , la déviation s'annulera quand le point ω sera en ω' , sur A, A' . Si nous revenons ensuite cap au Nord, il est clair que le point ω , qu'occupera le centre magnétique de la rose sera

encore sur la perpendiculaire menée à AA' par son milieu, puisque la translation a été effectuée perpendiculairement à la ligne des centres. Le point ω_i se déduit d'ailleurs bien évidemment du point ω par une translation égale à $\omega\omega'$ ou à CC' et parallèle à BR .

Il est clair que, si l'on voulait annuler par le même procédé la déviation à l'Est, il faudrait effectuer la même translation en sens inverse par rapport à l'appareil.

En résumé :

1° En déplaçant l'une des sphères, d'abord symétrique de l'autre par rapport au centre géométrique du compas, on doit pouvoir annuler la déviation au Nord;

2° En déplaçant le compas perpendiculairement à la ligne des centres (et sans changer, bien entendu, l'orientation de la ligne de foi), on doit pouvoir annuler la déviation à l'Ouest, sans que la déviation cesse d'être nulle au Nord.

Ces opérations effectuées, les déviations à l'Est et au Sud ne seront généralement pas nulles.

C'est ce que l'expérience nous a permis de vérifier parfaitement. Exemple :

1° *Sphères symétriques par rapport au compas* ($M = 2300$). — Le plan tangent à chaque sphère, parallèle à la ligne de foi et du côté du compas, est à $13^{\text{cm}},6$ du centre du compas. Déviation :

Nord.....	$\delta_N = - 10^{\circ}$
Ouest.....	$\delta_O = + 0,7$
Sud.....	$\delta_S = + 1$
Est.....	$\delta_E = + 1$

2° On écarte la sphère de droite de 2^{cm} . La déviation au Nord devient nulle. Le cap étant à l'Ouest, on fait subir au compas une translation de 4^{cm} parallèle à la ligne de foi et de même sens. La déviation à l'Ouest devient

nulle. Les déviations cardinales sont alors :

Nord.....	$\delta'_N =$	0^0
Ouest.....	$\delta'_O = +$	0,2
Sud.....	$\delta'_S = -$	3,5
Est	$\delta'_E = +$	0,3

Ce réglage fait, nous pouvons espérer vérifier la théorie établie, dans l'intervalle du Nord à l'Ouest. Toutefois, il est clair que, pendant la rotation, la configuration formée par le point ω et les centres des sphères change un peu ; on peut voir d'après les résultats exposés ci-dessous de quel ordre sont les erreurs que ces changements entraînent.

17. Donnons maintenant les Tableaux des déviations observées dans trois cas, avec le même compas liquide. La lecture proprement dite des déviations ne comportait pas d'autre précaution spéciale que de passer très lentement d'une position à une autre pour éviter que la masse liquide ne prît un mouvement d'ensemble entraînant la rose. On attendait, du reste, toujours assez pour être assuré que la position d'équilibre de la rose était atteinte. Les lectures étaient faites de 5^0 en 5^0 .

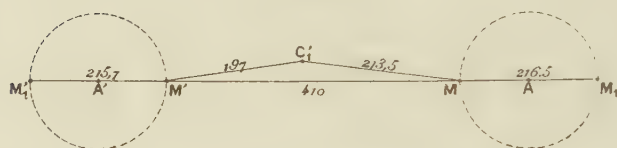
Pour fixer, une fois le réglage fait, les positions respectives du compas et des sphères, autrement dit des points A, A' et C' (*fig.* 19), on faisait passer un fil à plomb, soutenu par une potence, dans la rainure B et on l'amenait au milieu de la largeur de cette rainure, comme l'indique la figure 17. On l'amenait au contact de l'une des sphères, comme dans la figure 16, puis on brûlait le fil ; en tombant verticalement sur la table, la masse F du fil à plomb marquait un point. On opérait de même pour le point diamétralement opposé de la même sphère et pour l'autre sphère. Pour fixer la position de la verticale du pivot, on amenait la pointe du fil à plomb juste au-dessus du bouton situé au centre de la glace qui ferme le compas et sert à centrer l'alidade avec laquelle on prend les relèvements.

On enlève ensuite tout l'appareil et l'on fait tomber la masse F en brûlant le fil. On mesure ensuite avec une règle graduée les distances respectives des points marqués sur la table.

Voici les résultats obtenus pour trois configurations différentes du compas et des sphères :

Compas liquide : $M = 2300$ C. G. S.

Fig. 20.



$$\begin{aligned} M_1 M' &= 215^{\text{mm}}, 7, & M' C_1 &= 197^{\text{mm}}, & C_1 M &= 213^{\text{mm}}, 5, \\ MM_1 &= 216^{\text{mm}}, 5, & M' M &= 410^{\text{mm}}. \end{aligned}$$

TABLEAU I.

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées : $\frac{M}{H} = 11600.$
N 0	N 0	0	0	0
355	N 7,3 O	+ 1,1	+ 2,3	+ 2
350	N 14,5 O	+ 2,1	+ 4,5	+ 4
345	N 21,2 O	+ 3	+ 6,2	+ 5,8
340	N 27,5 O	+ 3,9	+ 7,5	+ 7,3
335	N 33,7 O	+ 4,6	+ 8,7	+ 8
330	N 39,1 O	+ 5,2	+ 9,1	+ 8,9
325	N 44,4 O	+ 5,4	+ 9,4	+ 9,1
320	N 49,3 O	+ 5,6	+ 9,3	+ 9,2
315	N 54 O	+ 5,7	+ 9	+ 9
310	N 58,8 O	+ 5,4	+ 8,8	+ 8,5
305	N 62,9 O	+ 5	+ 7,9	+ 8

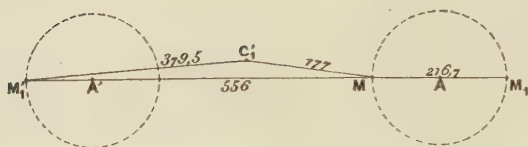
TABLEAU I (suite).

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées : $\frac{M}{H} = 11600.$
	⁰	⁰	⁰	⁰
300	N 67 O	+ 4,7	+ 7	+ 7,1
295	N 71 O	+ 4	+ 6	+ 6,1
290	N 74,9 O	+ 3	+ 4,9	+ 5
285	N 78,8 O	+ 2,5	+ 3,8	+ 3,8
280	N 82,4 O	+ 1,7	+ 2,4	+ 2,5
275	N 86,1 O	+ 0,8	+ 1,1	+ 1,2
O 270	N 89,9 O	0	— 0,1	0
260	S 82,8 O		— 2,8	
250	S 75,1 O		— 5,1	
240	S 67,3 O		— 7,3	
230	S 59 O		— 9	
220	S 50,1 O		10,1	
215	S 45,1 O		— 10,1	
210	S 39,9 O		— 9,9	
205	S 34,1 O		— 9,1	
200	S 28,1 O		— 8,1	
190	S 15 O		— 5	
S 180	S 1 O		— 1	
150	S 38,8 E		+ 8,8	
145	S 44 E		+ 9	
140	S 49,1 E		+ 9,1	
135	S 53,9 E		+ 8,9	
E 90	S 89,7 E		— 0,3	
40	N 49,9 E		— 9,9	
35	N 44,9 E		— 9,9	
30	N 39,7 E		— 9,7	
N 0	N		0	

Ces résultats sont représentés par les courbes I', I et I''
(Pl. XI).

Même compas.

Fig. 21.



$$M'_1 C'_1 = 379^{\text{mm}}, 5, \quad C'_1 M = 177^{\text{mm}},$$

$$MM_1 = 216^{\text{mm}}, 7, \quad M'_1 M = 556^{\text{mm}}.$$

TABLEAU II.

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées : $\frac{M}{H} = 11600.$
N 0	N 0,1 O	0	+ 0,1	0
355	N 10,4 O	+ 1,6	+ 5,4	+ 4,8
350	N 19,9 O	+ 3,2	+ 9,9	+ 8,9
345	N 28 O	+ 4,6	+ 13	+ 12
340	N 35,2 O	+ 5,7	+ 15,2	+ 14,1
335	N 41,3 O	+ 6,7	+ 16,3	+ 15,4
330	N 46,6 O	+ 7,3	+ 16,6	+ 16
325	N 51,5 O	+ 7,9	+ 16,5	+ 16,3
320	N 56 O	+ 8	+ 16	+ 15,7
315	N 60 O	+ 8	+ 15	+ 14,9
310	N 64 O	+ 7,5	+ 14	+ 13,7
305	N 67,6 O	+ 7,2	+ 12,6	+ 12,6
300	N 71,1 O	+ 6,3	+ 11,1	+ 11,8
295	N 74,6 O	+ 5,5	+ 9,6	+ 9,4
290	N 77,8 O	+ 4,7	+ 7,8	+ 7,7
285	N 81 O	+ 3,5	+ 6	+ 5,7
280	N 84,1 O	+ 2,4	+ 4,1	+ 3,9
275	N 87,2 O	+ 1,1	+ 2,2	+ 1,8

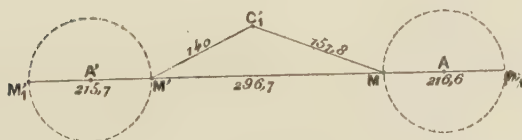
TABLEAU II (suite).

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées : $\frac{M}{H} = 11600.$
	⁰	⁰	⁰	⁰
O 270	S 89,7 O	+ 0	+ 0,3	0
215	S 51,3 O		— 16,3	
210	S 46,5 O		— 16,5	
205	S 41,1 O		— 16,1	
200	S 35,1 O		— 15,1	
S 180	S 1,3 O		— 1,3	
155	S 40,5 E		+ 15,5	
150	S 46 E		+ 16	
145	S 50,8 E		+ 15,8	
140	S 55,2 E		+ 15,2	
E 90	S 89,9 E		— 0,1	
35	N 51,4 E		— 16,4	
30	N 46,5 E		— 16,5	
25	N 41,1 E		— 16,1	
N 0	N		0	

Ces résultats sont représentés par les courbes II', II et II'' (Pl. XI).

Même compas.

Fig. 22.



$$M'_1 M' = 215^{\text{mm}}, 7, \quad M' C'_1 = 140^{\text{mm}}, \quad M C'_1 = 157^{\text{mm}}, 8,$$

$$M M_1 = 216^{\text{mm}}, 6, \quad M' M = 296^{\text{mm}}, 7.$$

D.

TABLEAU III.

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées : $\frac{M}{H} = 11600.$
N 0	N 0	0	0	0
355	N 17 O	+ 2,1	+ 12	+ 11,6
350	N 29 O	+ 4,2	+ 19	+ 18,4
345	N 37,3 O	+ 6	+ 22,3	+ 22,2
340	N 43,8 O	+ 7,5	+ 23,8	+ 24
335	N 49 O	+ 8,7	+ 24	+ 24,4
330	N 53,6 O	+ 9,4	+ 23,6	+ 24,2
325	N 57,6 O	+ 9,8	+ 22,6	+ 23,4
320	N 61,2 O	+ 10	+ 21,2	+ 22,1
315	N 64,9 O	+ 9,9	+ 19,9	+ 20,6
310	N 68 O	+ 9,4	+ 18	+ 18,7
305	N 71,1 O	+ 8,7	+ 16,1	+ 16,7
300	N 74 O	+ 7,9	+ 14	+ 14,6
295	N 77 O	+ 6,8	+ 12	+ 12,2
290	N 79,7 O	+ 5,7	+ 9,7	+ 10
285	N 82,3 O	+ 4,4	+ 7,3	+ 7,5
280	N 85,1 O	+ 2,9	+ 5,1	+ 5
275	N 87,8 O	+ 1,5	+ 2,8	+ 2,6
O 270	S 89,8 O	0	+ 0,2	0
260	S 84,3 O		— 4,3	
250	S 79 O		— 9	
240	S 73,5 O		— 13,5	
230	S 67,6 O		— 17,6	
220	S 61,1 O		— 21,1	
210	S 53,9 O		— 23,9	
205	S 49,7 O		— 24,7	
200	S 44,5 O		— 24,5	
195	S 38,6 O		— 23,6	
190	S 31 O		— 21	
185	S 20,2 O		— 15,2	
S 180	S 3,5 O		— 3,5	
175	S 17,7 E		+ 12,7	
170	S 28,3 E		+ 18,3	
165	S 37,3 E		+ 22,3	

TABLEAU III (suite).

Caps magnétiques		Déviations		
vrais (lectures sur le tambour P).	observés (lectures sur la rose).	calculées : $\frac{M}{H} = 0.$	observées : $\frac{M}{H} = 11600.$	calculées $\frac{M}{H} = 11600.$
160	S 43,7 E	0°	+ 23,7	0°
155	S 48,9 E		+ 23,9	
150	S 53,6 E		+ 23,6	
140	S 61,3 E		+ 21,3	
130	S 68,1 E		+ 18,1	
120	S 74 E		+ 14	
110	S 79,8 E		+ 9,8	
100	S 85 E		+ 5	
E 90	N 89,7 E		+ 0,3	
80	N 84,3 E		— 4,3	
70	N 79 E		— 9	
60	N 73,5 E		— 13,5	
50	N 67,7 E		— 17,7	
40	N 61,1 E		— 21,1	
30	N 53,6 E		— 23,6	
25	N 49 E		— 24	
20	N 44 E		— 24	
15	N 37,6 E		— 22,6	
10	N 29,2 E		— 19,2	
5	N 17,8 E		— 12,8	
N 0	N 0,3 E		— 0,3	

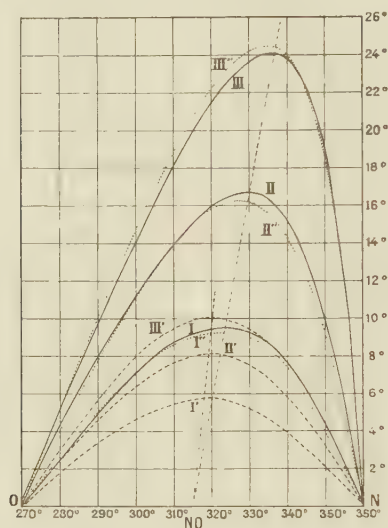
Ces résultats sont représentés par les courbes III', III et III'' (Pl. XI).

Notons, au sujet de ce dernier Tableau, que la lecture faite pour le Nord, après un tour, n'est pas la même qu'au début ; la différence est de 0°, 3. Nous attribuons ce fait, absent dans les deux premières séries de mesures, à ce que, dans cette dernière série, où les sphères sont très rapprochées du compas, la force directrice au Nord et au Sud est très faible ; la position d'équilibre de la rose est donc

moins bien assurée. Nous n'avons pas fait une étude plus approfondie de ce point.

18. Voyons maintenant comment la théorie qui a été faite plus haut rend compte de ces résultats expérimentaux. Il faut comparer les courbes que nous venons d'obtenir à celles qu'on peut déduire de l'équation d'équilibre

PL. XI.



du compas, donnant δ en fonction de ζ . En se reportant aux paragraphes 6, 7 et 12, on voit que cette équation, obtenue en égalant à 0 la somme des couples agissant sur la rose, est, pour une seule sphère, placée à la distance b du centre magnétique du compas sous l'azimut α par rapport à la ligne de foi :

$$\begin{aligned} \frac{M}{H} \frac{a^3}{b^6} & \left[P \cos(-\delta + \zeta + \alpha) + Q \cos 2(-\delta + \zeta + \alpha) \frac{l}{b} \right] \sin(-\delta + \zeta + \alpha) \\ & - \left(1 + c_1 \frac{a^3}{2b^3} + c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \cos 2\alpha \cos 2\zeta - c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \sin 2\alpha \sin 2\zeta \right) \sin \delta \\ & + \left(c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \cos 2\alpha \sin 2\zeta + c_1 \frac{3a^3}{2b^3} \sin 2\alpha \cos 2\zeta \right) \cos \delta = 0. \end{aligned}$$

Pour deux sphères identiques, l'une à la distance b , l'autre à la distance b' , sur la perpendiculaire à la ligne de foi, cette équation se réduit à

$$(11) \quad \frac{M}{H} a^3 \left(\frac{P}{b^6} + \frac{P'}{b'^6} \right) \sin(\delta - \zeta) \cos(\delta - \zeta) \\ - \left[1 + c_1 \frac{a^3}{2} \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b'^3} \right) \right] \sin \delta \\ + c_1 \frac{3a^3}{2} \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b'^3} \right) \sin(\delta - 2\zeta) = 0.$$

Elle exprime l'équilibre des couples engendrés par les vecteurs

$$\varphi_1 = 1 + c_1 \frac{a^3}{2} \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b'^3} \right),$$

parallèle au champ terrestre;

$$\varphi_3 = -c_1 \frac{3a^3}{2} \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b'^3} \right),$$

parallèle à ON' , défini plus haut;

$$\varphi_4 = \frac{M}{H} a^3 \left(\frac{P}{b^6} + \frac{P'}{b'^6} \right),$$

vecteur dirigé suivant l'axe magnétique du compas et considéré comme produisant un champ équipollent à sa projection sur la ligne des centres des sphères.

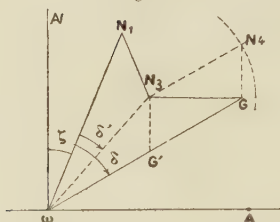
19. Cette représentation géométrique suggère aussitôt une méthode de résolution graphique de l'équation (11), qui revient en somme à construire le dygogramme relatif aux trois vecteurs $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4$.

Soit ωN la ligne de foi (*fig.* 23) perpendiculaire à la ligne des centres ωA , ω étant le centre magnétique du compas. Soit ωN_1 le vecteur φ_1 ; l'angle $N_1 \omega N$ est le cap ζ . Le vecteur φ_3 , représenté par $N_1 N_3$ est alors dirigé suivant la direction symétrique de $\overline{N_1 \omega}$ par rapport à la ligne de foi. Si le compas avait un moment magnétique très faible, il s'orienterait suivant ωN_3 et la déviation

serait l'angle

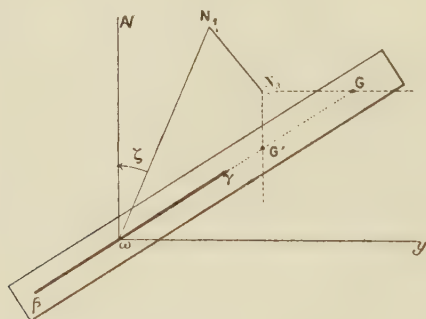
$$\delta' = \widehat{N_1 \omega N_3}.$$

Fig. 23.



Mais, le compas étant supposé avoir un moment magnétique tel que le vecteur φ_4 ne soit pas négligeable, son orientation d'équilibre est parallèle à une certaine direction ωG . Le champ qui agit sur lui est représenté par le vecteur ωG qui est la somme du vecteur ωN_3 et du vecteur $N_3 G$ parallèle à ωA ; ce vecteur doit être la projection d'un vecteur constant en grandeur $N_3 N_4$ et dirigé parallèlement à ωG .

Fig. 24.



Ayant obtenu le point N_3 , il est alors facile d'obtenir graphiquement le point G . On prend une feuille de mica, ou de celluloïd comme celles qui constituent les *rappor-teurs*; on y pratique une fente suivant $\beta\gamma$ (fig. 24); dans le prolongement de cette fente on perce deux petits trous G'

et G tels que la distance $G'G$ soit égale à φ_4 . On pique à travers la fente une aiguille passant par le point ω ; puis on déplace la bande en assujettissant le point G' à rester sur la parallèle à la ligne de foi menée par N_3 . Quand le point marqué G passe sur la perpendiculaire à la ligne de foi menée par N_3 , on marque G avec un crayon aigu; la direction de ωG donne l'orientation d'équilibre du compas correspondant au cap ζ . Il est clair, en effet, que $G'G$ est égal et parallèle à N_3N_4 (*fig.* 23).

20. Nous allons maintenant indiquer comment était fait le calcul des quantités $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4$:

1^o *Détermination de b et b'*. — Cette détermination se fait graphiquement en faisant avec soin, à l'échelle $\frac{1}{2}$, l'épure des configurations formées pour chacune des trois expériences relatées plus haut, par le point C'_i et les sphères. Le réglage indiqué au paragraphe 16 étant fait, nous savons que le point ω_1 se trouve sur la perpendiculaire au milieu de AA' , quand le cap est au Nord. Mais nous ne savons pas exactement à quel endroit de cette perpendiculaire. Toutefois, les dimensions mêmes du flotteur qui contient les aimants indiquent que la distance de ω_1 à la droite AA' ne peut certainement pas dépasser 3^{cm}. Même dans le cas de l'expérience III, où l'excentricité du point C'_i est la plus considérable, cela ne donne sur la distance ω_1A qu'une variation de 1 pour 100. Nous adopterons donc, en général, pour b et b' la moitié de la distance AA' .

Nous avons ainsi

$$(I) \quad b = b' = \left(\frac{21,57}{2} + \frac{21,65}{2} + 41,0 \right) \frac{1}{2} = 31^{\text{cm}}, 3,$$

$$(II) \quad b = b' = 27^{\text{cm}}, 8,$$

$$(III) \quad b = b' = 25^{\text{cm}}, 6.$$

2^o *Calcul de c_1* . — Nous avons déjà fait (§ 9) le calcul

de c_1 en admettant pour κ la valeur indiquée dans le *Handbuch der Physik* de Winkelmann pour la susceptibilité de la fonte dans les champs du même ordre de grandeur que le champ terrestre. L'acier doux fondu possède une susceptibilité beaucoup plus grande, égale à $18,7 + 13,4 \times 0,2 = 21,4$; c'est d'ailleurs la valeur maxima qu'on puisse admettre pour le métal qui constitue les globes et qui est un métal moulé.

Pour $\kappa = 3,2$, on a donc

$$c_1 = 0,7317,$$

et pour $\kappa = 21,4$, on a

$$c_1 = 0,9478.$$

Nous adopterons comme valeur probable de c_1

$$c_1 = 0,809,$$

qui correspond à $\kappa = 5$.

3° *Calcul de P et P'*. — Comme nous avons $b = b'$, nous avons aussi $P = P'$. L'expression de P est

$$P = 2^2 c_1 + 3^2 c_2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} + \dots$$

avec

$$c_n = \frac{1 + \frac{2n+1}{n+1} \frac{1}{4\pi\kappa}}{1 + \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{4\pi\kappa}\right) \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{1}{1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^{2n+1}}},$$

Cherchons à quel terme du développement en série il faudra s'arrêter pour calculer P avec une approximation donnée, $\frac{1}{1000}$ par exemple. Supposons que le dernier terme calculé soit

$$(n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}}.$$

Le reste de la série est moindre que

$$(n+2)^2 \frac{a^{2n}}{b^{2n}} + (n+3)^2 \frac{a^{2(n+1)}}{b^{2(n+1)}} + \dots$$

$$= \frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} - \left[2^2 + 3^2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}} \right].$$

Dans chaque cas on calculera donc la quantité

$$\frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3},$$

puis les valeurs successives de la quantité

$$2^2 + 3^2 \frac{a^2}{b^2} + \dots + (n+1)^2 \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}}.$$

Quand la différence correspondra à une erreur relative moindre que $\frac{1}{1000}$, on sera assuré qu'en s'arrêtant, dans le calcul de P, au terme

$$(n+1)^2 c_n \frac{a^{2(n-1)}}{b^{2(n-1)}}$$

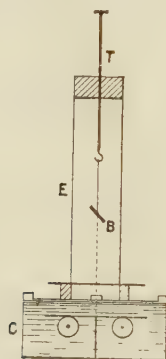
l'erreur commise sera aussi moindre que $\frac{1}{1000}$.

4° *Calcul de $\frac{M}{H}$.* — On pourrait déterminer $\frac{M}{H}$ en appliquant la méthode de Gauss à l'ensemble des aiguilles aimantées qui constituent la rose, après avoir enlevé celle-ci du compas. Mais, comme les aimants sont à l'intérieur du flotteur, il eût fallu démonter ce flotteur, dont les cotes ne nous étaient pas connues. Nous avons donc préféré employer la méthode suivante, qui ne nécessite aucun démontage du compas.

Sur la glace qui ferme le compas, on place une éprouvette large E (*fig. 25*) (10^{cm} de diamètre environ); cette éprouvette est fermée par un bouchon que traverse une

tige de laiton T à l'extrémité inférieure de laquelle est suspendu, par l'intermédiaire d'un fil de cocon, un petit barreau aimanté B, de faible moment magnétique (4,2 C. G. S. environ); le centre de ce barreau se trouve sur l'axe géométrique du compas; cette condition d'ailleurs

Fig. 25.



n'a pas besoin, évidemment, d'être réalisée avec une précision supérieure à quelques millimètres dans les conditions où l'on opère. Le barreau, à cause de son faible moment magnétique, ne change pas l'orientation de la rose; il est donc dans un champ parallèle au champ H qui agit sur la rose et égal à

$$H = \frac{M}{r^3},$$

r étant la distance des pôles de la rose aux pôles du barreau, distance qui, dans les conditions où nous avons opéré, diffère au plus de $\frac{1}{200}$ de la distance des plans horizontaux contenant les axes magnétiques de la rose et du magnétomètre. Soient alors T la période d'oscillation du magnétomètre placé au même endroit, mais sans que le compas soit au-dessous de lui, et Θ la période qui corres-

pond à la distance r ; nous avons

$$\frac{T^2}{\Theta^2} = \frac{H - \frac{M}{r^3}}{H} = 1 - \frac{1}{r^3} \frac{M}{H},$$

d'où

$$r = \left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{T^2}{\Theta^2}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Or le plan horizontal contenant l'axe magnétique du barreau B est déterminé en visant le centre de ses faces terminales avec un cathétomètre. Soient γ la lecture faite sur l'échelle du cathétomètre et x la quantité

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{T^2}{\Theta^2}\right)^{\frac{1}{3}}};$$

on a

$$\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}} x = a - \gamma,$$

a étant une constante inconnue. Si l'on détermine Θ pour plusieurs positions du magnétomètre, obtenues en enfonçant plus ou moins la tige T dans le bouchon, la courbe reliant x et γ sera une droite dont le coefficient angulaire sera, au signe près, $\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$.

La valeur de T et les valeurs de Θ ont été déterminées en prenant la durée de 100 oscillations simples. Les résultats des mesures sont réunis dans le Tableau suivant :

100 T = 327",5.			
Numéros d'ordre.	γ . cm	100 Θ .	$\left(1 - \frac{T^2}{\Theta^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
1	0	380,8	1,55888
2	1,269	389,4	1,50619
3	3,401	408	1,41139
4	5,407	435,2	1,321101
5	8,335	510,6	1,193234

On peut obtenir 10 valeurs de $\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$ en groupant deux à deux ces cinq observations; la combinaison (3)-(4) donnera, par exemple,

$$\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2,006}{0,09029};$$

la combinaison (1)-(2) a été éliminée comme donnant un résultat trop divergent des neuf autres. Nous obtenons ainsi, par la moyenne de ces derniers,

$$\frac{M}{H} = 11600.$$

On s'est assuré d'ailleurs que le champ H ne différait pas du champ terrestre à Paris de plus de 2 pour 100, ce qui donne pour le moment M la valeur 2300 C. G. S. C'est un moment magnétique notablement moindre que ceux de la plupart des compas liquides étrangers [compas Magnaghi 3200, compas américain Ritchie 2750, compas allemand Bamberg 5200 ⁽¹⁾].

21. Voici maintenant la transcription des résultats numériques obtenus d'après la théorie.

On a d'abord, en supposant $\alpha = 5$,

$$c_1 = 0,809,$$

$$c_2 = 0,824,$$

$$c_3 = 0,828,$$

$$c_4 = 0,830,$$

$$c_5 = 0,832.$$

Comme on va le voir, il n'a pas été nécessaire de poursuivre plus loin le calcul des coefficients c .

(¹) Données numériques extraites du *Trattato sul magnetismo delle navi in ferro et sulle bussole marine*, par le lieutenant de vaisseau CORBARA.

Expérience I :

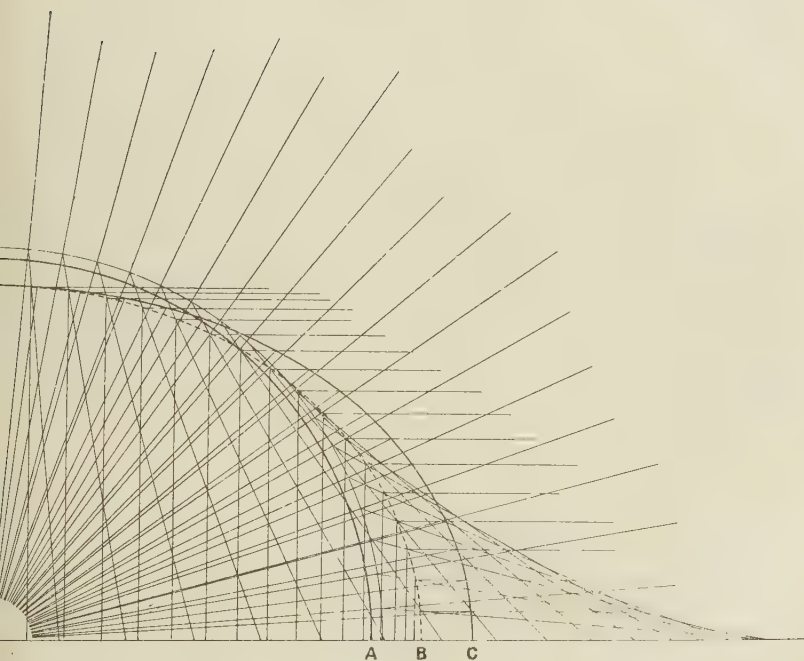
$$a = 10^{\text{cm}}, 8, \quad b = 31^{\text{cm}}, 3,$$

$$4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} = 5,34913,$$

$$\frac{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} = 5,34913,$$

$$2^2 + 3^2 \frac{a^2}{b^2} + 4^2 \frac{a^4}{b^4} = 5,340305.$$

ÉPURE I.



L'erreur absolue commise dans le calcul de P en s'arrêtant au terme $4^2 c_3 \frac{a^4}{b^4}$ sera donc moindre que 0,009.

On a ainsi

$$P = 4,341741 \left(\text{à } \frac{9}{4342} \text{ près ou } 0,002 \right),$$

$$\varphi_1 = 1 + 0,809 \frac{\frac{10,8}{3}}{31,3} = 1,0332,$$

$$\varphi_3 = -0,0997,$$

$$\varphi_4 = 0,13495.$$

La résolution graphique de l'équation (4) correspondant à ce cas a été faite, suivant la méthode indiquée au paragraphe 19, au moyen de l'épure I. $\varphi = 1$ est représenté par 50^{mm}. Cette épure permet de construire la Table de déviations contenue dans le Tableau I aux colonnes qui portent comme en-têtes : *déviations calculées* $\frac{M}{H} = 11600$ et *déviations calculées* $\frac{M}{H} = 0$. Ce dernier Tableau est celui qui conviendrait à un compas de très faible moment magnétique; on voit combien il diffère du Tableau des déviations observées avec le compas liquide étudié. Ces résultats de calcul sont représentés par les courbes I' ($\frac{M}{H} = 0$) et I'' ($\frac{M}{H} = 11600$) (Pl. XI) en tracé discontinu.

Expérience II :

$$a = 10,8, \quad b = b' = 27,8,$$

$$\frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} = 5,8327,$$

$$2^2 + 3^2 \frac{a^2}{b^2} + 4^2 \frac{a^4}{b^4} + 5^2 \frac{a^6}{b^6} + 6^2 \frac{a^8}{b^8} = 5,82738.$$

L'erreur absolue commise dans le calcul de P en s'arrêtant au terme $6^2 c_5 \frac{a^8}{b^8}$ sera donc certainement moindre

que 0,0054. On a ainsi

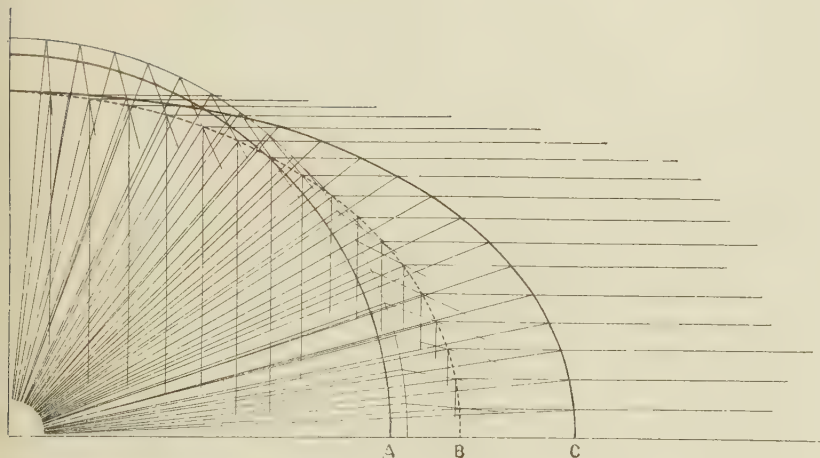
$$P = 4,74389 \quad \left(\text{à } \frac{5}{4744} \text{ ou } 0,001 \text{ près} \right),$$

$$\varphi_1 = 1,0474,$$

$$\varphi_3 = -0,1423,$$

$$\varphi_4 = 0,300374.$$

ÉPURE II.



Épure II. Même échelle que la précédente. Tableau II, contenant les colonnes de déviations déduites de cette épure. Courbes II' et II'' (Pl. XI). D'après la courbe qui rectifie les erreurs accidentelles dues aux imperfections de l'épure et de l'emploi du rapporteur pour relever les angles, on voit que l'écart maximum entre les valeurs calculées et les valeurs observées des déviations n'atteint pas 1°, tandis que la théorie ancienne donnerait une divergence de près de 10°.

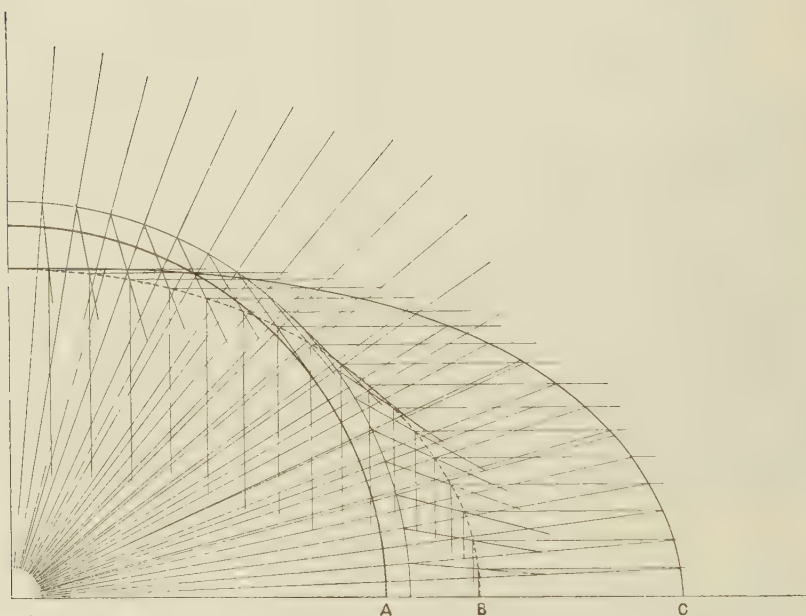
Expérience III :

$$a = 10,8, \quad b = b' = 25^{\text{cm}}, 6,$$

$$\frac{4 - 3 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^3} = 6,29705,$$

$$2^2 + 3^2 \frac{a^2}{b^2} + 4^2 \frac{a^4}{b^4} + 5^2 \frac{a^6}{b^6} + 6^2 \frac{a^8}{b^8} = 6,285696.$$

ÉPURE III.



La différence entre ces deux nombres est 0,00135; en calculant P nous nous arrêterons au terme $6^2 c_5 \frac{a^8}{b^8}$. On a

$$P = 5,113021 \quad \left(\text{à } \frac{0,00135}{5,11302} = 0,0002 \text{ près} \right),$$

$$\varphi_1 = 1,060883,$$

$$\varphi_3 = -0,182649,$$

$$\varphi_4 = 0,530915.$$

Épure III. Tableau III. Courbes III' et III'' (Pl. XI) en tracé discontinu.

22. Les courbes de déviations que notre théorie nous a permis de construire concordent donc d'une manière qui nous paraît satisfaisante avec les courbes expérimentales, étant données les erreurs, signalées plus haut, dues au défaut de centrage du compas et à l'incertitude qui règne sur la valeur de x [pour l'épaisseur des globes nous avons adopté la valeur indiquée pour les globes réglementaires (1)].

Toutefois, il paraît certain qu'il y a une légère différence systématique entre la forme des courbes expérimentales et celle des courbes théoriques : il semble impossible que les branches ascendantes et descendantes des deux séries courbes coïncident simultanément; ainsi les branches descendantes des courbes II et II'' coïncident, mais non les branches ascendantes; les branches ascendantes des courbes III et III'', au contraire, coïncident, mais non les branches descendantes. L'examen des graphiques indique que cela est lié à ce fait que le lieu géométrique des maxima des courbes théoriques est à gauche, sur cette planche, du lieu correspondant pour les courbes expérimentales. Indépendamment des causes d'erreur signalées plus haut, cette divergence peut aussi provenir des termes négligés (en $\frac{l^2}{b^2}, \dots$) dans le développement du couple directeur dû à l'action du compas sur les sphères.

La théorie indique, remarquons-le en passant, que, si l'on ne tient pas compte de cette action, le lieu du maximum de la courbe des déviations correspondant à une même paire de globes dont on fait varier la distance au compas est une droite qui a pour équation dans le qua-

(1) E. GUYOU, *Description et usage des instruments nautiques*.

drant NO

$$\zeta = 315^\circ + \frac{\delta}{2} \quad (1).$$

C'est ce que l'on constate pour les courbes I', II' et III'.

Sur le graphique, le lieu des sommets des courbes expérimentales I, II, III paraît être aussi une droite; mais nous verrons plus loin que ce n'est pas rigoureusement une droite. Ce lieu dépend d'ailleurs évidemment de la valeur de $\frac{M}{H}$.

23. La recherche de ce lieu géométrique est liée au calcul de la *puissance compensatrice* d'une paire de globes. Indiquons maintenant ce calcul.

Soient δ_m la déviation maxima que peut produire cette paire de globes, et ζ_0 le cap pour lequel le maximum de δ est atteint; δ_m et ζ_0 vérifient l'équation générale (11) et l'équation dérivée par rapport à ζ dans laquelle on remplace $\frac{d\delta}{d\zeta}$ par zéro; ainsi donc δ_m et ζ_0 sont donnés par les deux équations

$$(11) \quad \frac{\varphi_4}{2} \sin 2(\delta_m - \zeta_0) - \varphi_1 \sin \delta_m - \varphi_3 \sin(\delta_m - 2\zeta_0) = 0,$$

$$(12) \quad -\varphi_4 \cos 2(\delta_m - \zeta_0) + 2\varphi_3 \cos(\delta_m - 2\zeta_0) = 0,$$

ou bien, en introduisant le cap au compas ζ' lié à ζ et δ par la relation

$$\zeta' = \zeta - \delta,$$

$$(\varphi_1 - \varphi_3 \cos 2\zeta'_0) \sin \delta_m - \varphi_3 \sin 2\zeta'_0 \cos \delta_m + \frac{\varphi_4}{2} \sin 2\zeta'_0 = 0,$$

$$2\varphi_3 \sin 2\zeta'_0 \sin \delta_m - 2\varphi_3 \cos 2\zeta'_0 \cos \delta_m + \varphi_4 \cos 2\zeta'_0 = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on constate que le numérateur de δ_m est identiquement nul; comme δ_m n'est pas nul, il faut que le dénominateur soit nul, ce qui

(1) *Manuel des instruments nautiques.*

donne

$$(\varphi_1 - \varphi_2 \cos 2\zeta'_0) \cos 2\zeta'_0 - \varphi_3 \sin^2 2\zeta'_0 = 0$$

ou

$$(13) \quad \cos 2\zeta'_0 = \frac{\varphi_3}{\varphi_1}.$$

Cette équation donne le lieu géométrique des sommets des courbes de déviations construites en prenant pour abscisses les caps *au compas*; c'est donc une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses si $\frac{a}{b}$ reste constant.

Remarquons en passant que si $\varphi_4 = 0$ l'équation (12) nous donne

$$\delta_m - 2\zeta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \zeta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_m}{2}$$

en prenant le cap ζ_0 dans le quadrant NE. C'est le résultat rappelé au paragraphe précédent.

ζ'_0 étant donné par l'équation (13), δ_m est alors donné par l'équation

$$(13') \quad 2\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_3^2} \sin \delta_m - 2\varphi_3 \cos \delta_m + \varphi_4 = 0,$$

dont la résolution est classique; on a

$$(14) \quad \delta_m = -\arctan \frac{-\varphi_3}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_3^2}} + \arcsin \left(\frac{-\varphi_4}{2\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_3^2}} \cos \arctan \frac{-\varphi_3}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_3^2}} \right).$$

La concordance de cette formule avec nos expériences est évidente, puisque les courbes obtenues expérimentalement et théoriquement pour δ concordent elles-mêmes. Nous avons ainsi :

Expérience.	δ_m observé.	δ_m calculé.
	⁰	⁰
I.....	9,4	9,2
II.....	16,6	16,1
III.....	24,1	24,38

Si l'on remplace φ_4 par zéro dans la formule (14), on retrouve l'expression donnée par le commandant Guyou pour la puissance compensatrice d'une paire de globes.

On sait que l'équation (13') n'a de solution que si

$$\varphi_4^2 < 4(\varphi_1^2 - \varphi_3^2) + 4\varphi_3^2$$

ou

$$\varphi_4 < 2\varphi_1.$$

(Voir à ce sujet la Note I.)

Enfin le lieu géométrique du sommet de la courbe des déviations construite en prenant en abscisses ζ n'est pas rigoureusement une droite; il a pour équation

$$\zeta = \delta_m + \frac{1}{2} \arccos \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

δ_m étant remplacé par l'expression (14).

IV. — Conséquences.

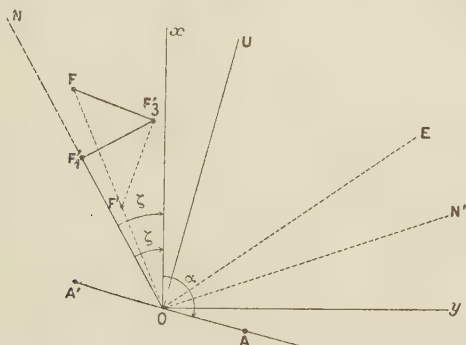
24. L'aimantation prise par les correcteurs de fer doux sous l'influence du compas permet-elle une compensation exacte? Telle est la question importante que la théorie qui précède va permettre de résoudre très simplement.

Le principe de la compensation du compas Thomson consiste essentiellement à opposer à chacune des forces perturbatrices qui agissent sur le compas une force de même nature, c'est-à-dire qui soit, pour tous les caps, égale et opposée à la force perturbatrice à corriger, et dont, par conséquent, la loi de variation avec le cap soit la même que celle de la force perturbatrice. L'induction des correcteurs sous l'influence du compas se traduisant par une force qui n'a son équivalent dans aucune des forces produites par le navire et dont la loi de variation avec le cap est différente de celle de chacune de ces forces,

il semble que la compensation rigoureuse soit *a priori* impossible ⁽¹⁾.

Une circonstance très particulière rend cependant cette compensation parfaitement possible. Soient O le centre du compas (*fig. 26*), Ox la parallèle menée par O à l'axe

Fig. 26.



longitudinal, OU le plan de symétrie apparente des fers doux ; les centres des sphères correctrices sont en A et A' sur la perpendiculaire menée par O à ce plan ; soient enfin ON la direction du Nord magnétique, et ON' la direction symétrique de ON par rapport à OU .

Les forces que le champ terrestre et les fers doux du navire produisent au point O sont F_1 , dirigé suivant ON et F_3 dirigé suivant ON' . Chacune de ces forces aimante par induction les sphères de fer doux, et le champ créé par ces sphères ainsi aimantées est décomposable (*1^{re} Partie*, § 14) en deux vecteurs constants dirigés également suivant ON et ON' , de sorte que le champ créé au point O par le champ terrestre, le navire et les correcteurs de fer doux se compose :

(¹) *Comptes rendus*, t. CXLVII, 1908, p. 834.

1° D'un vecteur F'_1 dirigé suivant ON :

$$F'_1 = F_1 + f_1 F_1 - f_3 F_3;$$

2° D'un vecteur F'_3 dirigé suivant ON' :

$$F'_3 = F_3 - f_3 F_1 + f_1 F_3,$$

en posant, comme on l'a vu, dans le cas de deux sphères creuses,

$$f_1 = \frac{c_1 a^3}{b^3}, \quad f_3 = 3 c_1 \frac{a^3}{b^3}.$$

Si le moment magnétique du compas est assez grand pour que l'induction qu'il crée sur les correcteurs ne soit pas négligeable, il faudra ajouter aux forces précédentes une force $F'_3 F$ égale à la projection sur AA' du vecteur constant

$$F' F = {}_2 M \frac{a^3}{b^6} P$$

dirigé suivant l'axe magnétique OF du compas.

Pour exprimer que la déviation relative au cap ζ est nulle, dans le cas d'un compas Thomson, on écrit $F'_3 = 0$; cette condition étant indépendante de ζ , la compensation se trouve par le fait même assurée à tous les caps. Dans le cas d'un compas de grand moment magnétique, pour exprimer que la déviation relative au cap ζ est nulle, il faut écrire que la projection du contour $OF'_1 F'_3 F$ sur la perpendiculaire à ON est nulle; on obtient ainsi une équation de condition dans laquelle figure évidemment l'angle ζ ; si elle est vérifiée pour une valeur de ζ , il n'y a *a priori* aucune raison pour qu'elle soit toujours vérifiée; c'est pour cela que la compensation rigoureuse semble impossible.

La circonstance particulière à laquelle nous avons fait allusion est la suivante (1). Pour que la déviation relative

(1) *Comptes rendus*, t. CXLVII, 1908.

au cap ζ soit nulle, il faut et il suffit qu'on ait

$$F'_3 \cos \left[-\frac{\pi}{2} + 2 \left(\zeta + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ + 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \cos \left(\zeta + \alpha - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\zeta + \alpha - \frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

ou

$$F'_3 \sin 2(\zeta + \alpha) - 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \sin(\zeta + \alpha) \cos(\zeta + \alpha) = 0,$$

ou encore

$$\sin 2(\zeta + \alpha) \left(F'_3 - M \frac{\alpha^3}{b^6} P \right) = 0.$$

Si donc cette relation est vérifiée pour une valeur de $\zeta + \alpha$ différente de zéro et de $\frac{\pi}{2}$, elle sera toujours vérifiée et *la compensation sera effectuée*.

25. Remarquons encore, qu'une fois la compensation effectuée, la force directrice sera la même à tous les caps ; en projetant en effet le contour $OF'_1F'_3F$ sur GN on a, dans ce cas,

$$OF = F'_1 + F'_3 \cos 2 \left(\zeta + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \cos^2(\zeta + \alpha - \pi)$$

ou

$$OF = F'_1 - F'_3 \cos 2(\zeta + \alpha) + 2F'_3 \cos^2(\zeta + \alpha),$$

ou encore

$$OF = F'_1 + F'_3.$$

Le principe sur lequel repose l'emploi du déflecteur est donc encore applicable, ce qui n'était, *a priori*, nullement évident.

26. Il reste à voir comment on pourra pratiquement effectuer la compensation. On a calculé plus haut la déviation maxima δ_m que peut imprimer à un compas, dans un champ uniforme H , une paire de globes de fer doux. Dans le cas d'un compas de faible moment magnétique, cette déviation maxima est égale à la déviation maxima, due aux fers doux, que la paire de globes pourra com-

penser sur un navire. C'est, comme nous l'avons vu dans la première Partie, la puissance compensatrice de la paire de globes. Dans le cas d'un compas de grand moment magnétique il y a lieu, comme on va le voir, de distinguer entre la déviation maxima δ , due aux fers doux du navire, qu'un système de correcteurs peut compenser, et la déviation maxima δ_m que les mêmes correcteurs, placés de la même manière par rapport au compas, lui font subir dans un champ uniforme.

Considérons en effet le compas et deux globes compensateurs dans un champ uniforme d'intensité F_1, F_1 , ayant toujours la même signification que ci-dessus; il subira une déviation maxima δ_m satisfaisant à l'équation

$$(15) \quad \sqrt{(1+f_1)^2 - f_3^2} \sin \delta_m + f_3 \cos \delta_m + \frac{M}{F_1} \frac{a^3}{b^6} P = 0,$$

puisque, si les globes sont symétriquement placés, on a, avec les notations employées plus haut,

$$\varphi_1 = 1 + f_1, \quad \varphi_3 = -f_3.$$

Supposons maintenant le compas et les correcteurs soumis à l'action des deux champs F_1 et F_3 , comme sur le navire; si les déviations sont annulées pour la position donnée aux correcteurs, on a

$$(16) \quad (1+f_1) F_3 - f_3 F_1 = M \frac{a^3}{b^6} P.$$

Or la déviation maxima δ'_m subie par le compas, correcteurs de fer doux enlevés, est donnée par la relation

$$(17) \quad \sin \delta'_m = \frac{F_3}{F_1} = \frac{f_3 + \frac{M}{F_1} \frac{a^3}{b^6} P}{|1+f_1|};$$

δ'_m est donc différent de δ_m .

Ce que l'expérience donne directement, soit par la détermination de relèvements, soit par l'emploi du déflex-

teur (I^{re} Partie), c'est le rapport $\frac{F_3}{F_1}$ ou δ'_m . Il faut donc, connaissant δ'_m , savoir quels correcteurs on doit employer et à quelle distance il faut les mettre du compas; ces deux éléments seront donnés par des Tables pour l'établissement desquelles la détermination de δ_m , directement accessible par des expériences à terre, sera un intermédiaire commode. En effet, l'équation (17) donne

$$\frac{M}{F_1} \frac{\alpha^3}{b^6} P = (1 + f_1) \sin \delta'_m - f_3;$$

en tenant compte de cette relation, on peut écrire l'équation (15)

$$\sqrt{(1 + f_1)^2 - f_3^2} \sin \delta_m + f_3 \cos \delta_m + (1 + f_1) \sin \delta'_m - f_3 = 0.$$

Posons

$$(18) \quad \frac{f_3}{1 + f_1} = \sin \beta,$$

ce qui est toujours permis; $\sin \beta$ est la puissance compensatrice de la paire de correcteurs considérée, en présence d'un compas de faible moment magnétique; on a

$$\cos \beta \sin \delta_m + \sin \beta \cos \delta_m = \sin \beta - \sin \delta'_m$$

ou

$$(19) \quad \sin(\beta + \delta_m) = \sin \beta - \sin \delta'_m.$$

Telle est la relation qui relie la déviation maxima β que la paire de correcteurs peut imprimer, dans un champ uniforme quelconque, à un compas de faible moment magnétique, la déviation maxima δ_m que les mêmes correcteurs placés de la même manière peuvent faire subir, *dans un champ uniforme* F_1 , au compas de moment magnétique M , et la déviation maxima δ'_m que ces correcteurs pourront annuler sur un navire en présence des champs F_1 et F_3 . L'intérêt de cette relation

vient de ce que β et δ_m sont facilement et directement mesurables par l'expérience.

Voici donc comment on construira la Table permettant d'utiliser une paire de correcteurs de dimensions données.

1° Dans un champ uniforme quelconque, on fera tourner les correcteurs, placés symétriquement à une distance b du centre d'un compas Thomson, et l'on déterminera ainsi les angles β correspondant aux différentes valeurs de b (').

2° On remplacera le compas Thomson par le compas liquide à étudier et l'on recommencera la même série de déterminations; c'est ce qui est décrit dans les pages 96 et suivantes. On déterminera aussi le champ H dans lequel ces mesures auront été faites. Pour en déduire les valeurs $\delta_{m,1}$ de la déviation maxima produite par les mêmes correcteurs dans un champ H_1 différent de H , on utilisera la relation

$$\frac{\sin(\beta + \delta_{m,1})}{\sin(\beta + \delta_m)} = \frac{H}{H_1},$$

qui se déduit immédiatement des relations (17) et (18). On pourra ainsi dresser un Tableau à double entrée représenté schématiquement comme l'indique la figure 27; et à tous les nombres d'une même ligne de ce Tableau correspondra une même valeur de β .

3° On déduira de l'équation (19) [ou plutôt de l'équation calculable par logarithmes

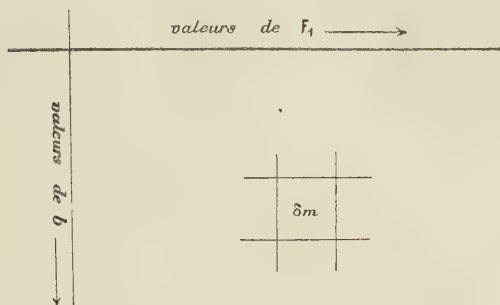
$$\sin \delta'_m = -2 \sin \frac{\delta_m}{2} \cos \left(\beta + \frac{\delta_m}{2} \right)]$$

les valeurs de δ'_m correspondant aux différentes cases du Tableau précédent, et l'on dressera un Tableau à double

(') Voir, pour cette détermination, E. GUYOU, *Manuel des instruments nautiques*, p. 95.

entrée semblable au précédent, mais où δ'_m remplacera δ_m . Il faudra dresser un Tableau comme cela pour chaque dimension de correcteurs.

Fig. 27.



Pour utiliser ces Tableaux on déterminera, comme il a été dit, δ'_m par la mesure de $\frac{F_3}{F_1}$ ou de $\sqrt{\mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2}$ et F_1 ou λ (car $F_1 = \lambda H$ et H sera donné par les Cartes magnétiques). On connaîtra ainsi a et b .

27. La compensation rigoureuse d'un compas de grand moment magnétique est donc possible et l'on vient de donner le moyen de construire les Tables qui permettront d'effectuer pratiquement cette compensation. Mais un inconvénient grave se présente : la compensation, effectuée en un endroit du globe, ne sera pas permanente au cours d'une navigation pendant laquelle la composante horizontale du magnétisme terrestre changera. C'est ce qu'ont signalé depuis longtemps, d'une manière qualitative, Poisson et Lord Kelvin. La théorie qui a été exposée dans les pages précédentes permet facilement de calculer *a priori* les erreurs qui apparaîtront sur un compas, d'abord exactement compensé, au fur et à mesure des variations de H . Voici ce calcul.

Soit δ'_m la déviation maxima, due aux fers doux du navire, qu'il faut compenser. Cette compensation est

effectuée en un point A_0 du globe, au moyen d'une paire de sphères correctrices qui produiraient sur un compas de moment magnétique très faible une déviation maxima β . Si le compas de grand moment magnétique et ses correcteurs étaient placés dans un champ uniforme d'intensité $F_1 = \lambda H$, H étant l'intensité de la composante horizontale terrestre au point A_0 , il subirait une déviation maxima $\delta_{m,0}$; et l'on a entre les déviations δ'_m , β et $\delta_{m,0}$ la relation

$$\sin(\beta + \delta_{m,0}) = \sin \beta - \sin \delta'_m,$$

ou bien

$$\sin \delta'_m = -2 \sin \frac{\delta_{m,0}}{2} \cos \left(\beta + \frac{\delta_{m,0}}{2} \right).$$

Si l'on passe du lieu A_0 en un autre lieu A_1 , où l'intensité de la composante horizontale terrestre est H_1 , la compensation ne subsiste pas, car la relation (17), où δ'_m est constant et F_1 variable, n'est plus vérifiée. Soit δ_1 la déviation subie par le compas pour un cap magnétique ζ . δ et ζ sont liés par l'équation d'équilibre du compas, obtenue en projetant le contour OF_1F_3F (fig. 26) sur la direction perpendiculaire à OF ; cette équation est donc

$$F'_1 \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) + F'_3 \cos \left[-\frac{\pi}{2} - \delta_1 + 2 \left(\zeta + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ + 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha - \zeta + \delta_1 \right) \cos \left(\alpha - 3 \frac{\pi}{2} + \zeta - \delta_1 \right) = 0$$

ou

$$F'_1 \sin \delta_1 + F'_3 \sin (2\zeta + 2\alpha - \delta_1) \\ - 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \cos (\alpha + \zeta - \delta_1) \sin (\alpha + \zeta - \delta_1) = 0.$$

Nous examinerons le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$; l'équation précédente devient alors

$$F'_1 \sin \delta_1 - F'_3 \sin (2\zeta - \delta_1) + 2M \frac{\alpha^3}{b^6} P \sin (\zeta - \delta_1) \cos (\zeta - \delta_1) = 0.$$

Comme cela devait être, c'est l'équation (11) (§ 18), dans laquelle on remplace φ_1 par F'_1 , φ_3 par F'_3 et φ_4 par $2M \frac{a^3}{b^6} P$. En se reportant au calcul de δ_m (§ 23), on voit que le maximum de δ_1 ou $\delta_{m,1}$, que nous calculerons seulement, est donné par l'équation (13'), dans laquelle il faut faire subir à φ_1 , φ_3 et φ_4 les mêmes substitutions; on a donc

$$\sqrt{F_1'^2 - F_3'^2} \sin \delta_{m,1} - F_3' \cos \delta_{m,1} + M \frac{a^3}{b^6} P = 0.$$

Remplaçons F'_1 et F'_3 par leurs expressions

$$\begin{aligned} F'_1 &= (1 + f_1) F_{1,1} - f_3 F_{3,1} = (1 + f_1) F_{1,1} (1 - \sin \beta \sin \delta'_m), \\ F'_3 &= (1 + f_1) F_{3,1} - f_3 F_{1,1} = (1 + f_1) F_{1,1} (\sin \delta'_m - \sin \beta), \end{aligned}$$

en désignant par $F_{1,1}$ et $F_{3,1}$ les valeurs des composantes F_1 et F_3 au lieu A_1 ; on a pour $\delta_{m,1}$ l'équation

$$\begin{aligned} &\sqrt{(1 - \sin \beta \sin \delta'_m)^2 - (\sin \delta'_m - \sin \beta)^2} \sin \delta_{m,1} \\ &- (\sin \delta'_m - \sin \beta) \cos \delta_{m,1} + \frac{M}{(1 + f_1) F_{1,1}} \frac{a^3}{b^6} P = 0. \end{aligned}$$

Mais, puisqu'au lieu A_0 la compensation exacte a été faite, on a [équation (17)]

$$\frac{M}{F_{1,0}} \frac{a^3}{b^6} P = (1 + f_1) \sin \delta'_m - f_3,$$

et l'équation en $\delta_{m,1}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\cos \beta \cos \delta'_m \sin \delta_{m,1} \\ &- (\sin \delta'_m - \sin \beta) \cos \delta_{m,1} + \frac{F_{1,0}}{F_{1,1}} (\sin \delta'_m - \sin \beta) = 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (20) \quad &\cos \beta \cos \delta'_m \sin \delta_{m,1} \\ &+ \sin(\beta + \delta_{m,0}) \cos \delta_{m,1} - \frac{H_0}{H_1} \sin(\beta + \delta_{m,0}) = 0, \end{aligned}$$

puisque l'on a

$$F_{1,0} = \lambda H_0,$$

$$F_{1,1} = \lambda H_1.$$

La compensation ayant été faite au lieu A_0 , nous connaissons β , δ'_m , $\delta_{m,0}$, et la connaissance par les Cartes magnétiques de $\frac{H_0}{H_1}$ nous permettra, au moyen de l'équation (20) de calculer $\delta_{m,1}$, c'est-à-dire l'erreur maxima que le compas, compensé au lieu A_0 , présentera au point A_1 .

28. Faisons une application numérique de l'équation (20) au cas de l'expérience III relatée plus haut. Des sphères creuses de fer doux sont placées par le travers du compas et l'on a

$$b = 25^{\text{cm}}, 6, \quad a = 10^{\text{cm}}, 8, \quad c_1 = 0, 809;$$

on a alors

$$\sin \beta = \frac{f_3}{1 + f_1} = \frac{-\varphi_3}{\varphi_1} = \frac{0,182649}{1,060883}, \quad \beta = 9^\circ 55'.$$

L'expérience donne, à Paris, pour $\delta_{m,0}$,

$$\delta_{m,0} = 24^\circ 15'.$$

Elle aurait donné très sensiblement le même résultat à Brest, Paris et Brest étant très sensiblement sur la même ligne d'égale intensité horizontale. Quelle est la déviation maxima due aux fers doux δ_m que les mêmes correcteurs, placés de la même manière par rapport au même compas, permettront de compenser à Brest ? On a

$$\sin \delta'_m = -2 \sin 12^\circ 7' 30'' \cos 22^\circ 2' 30''$$

ou

$$\delta'_m = -22^\circ 55'.$$

Supposons donc que l'étude du champ magnétique au centre du compas (correcteurs enlevés), faite à Brest, soit par la méthode des relèvements, soit au moyen du déflecteur, ait montré qu'il fallait compenser une déviation maxima due aux fers doux du navire égale à $-22^\circ 55'$. On placera les globes considérés de manière que leur centre soit à $25^{\text{cm}}, 6$ du centre du compas (compas étudié). Sup-

posons maintenant qu'on se rende à Port-Saïd; on a, très sensiblement,

$$\frac{H_0}{H_1} = \frac{0,196}{0,3} = 0,655.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation (20) en remplaçant β , δ'_m , $\delta_{m,0}$ et $\frac{H_0}{H_1}$ par leurs valeurs. Si l'erreur $\delta_{m,1}$ n'est pas trop grande, on peut d'ailleurs simplifier le calcul en remplaçant $\cos \delta_{m,1}$ par l'unité. Faisons cette première approximation; on a

$$\sin \delta_{m,1} = \frac{\left(\frac{H_0}{H_1} - 1\right) \sin(\beta + \delta_{m,0})}{\cos \beta \cos \delta'_m} = - \frac{0,345 \sin 34^\circ 10'}{\cos 9^\circ 55' \cos 22^\circ 55'}$$

ou

$$\delta_{m,1} = -12^\circ 20'.$$

29. On voit donc qu'il sera de toute nécessité de déplacer les correcteurs au fur et à mesure de la navigation, et l'on peut dire *journellement*; pour des navires rapides, naviguant suivant un méridien ou à peu près, on pourrait presque dire *heure par heure*. Cela oblige à une complication plus grande des appareils, car il faut pouvoir déplacer bien continûment et de petites quantités les correcteurs, que, dans le compas Thomson, on boulonne solidement une fois pour toutes ou à peu près sur les potences; pour exécuter ce déplacement, on utilisera la Table à double entrée qu'on a appris à construire plus haut et les Cartes d'égale composante horizontale. Mais la complication de service qui résultera de ces modifications perpétuelles sur les correcteurs n'est-elle pas un faible inconvénient devant le danger que présentent, selon nous, ces modifications mêmes? Après plusieurs heures de navigation dans la brume, on ne peut savoir où l'on est que par les caps suivis et la vitesse du navire, et au bout d'un ou deux jours, si la position exacte n'a pu

être déterminée par une observation astronomique, on peut être ainsi placé dans le dilemme, ou bien de ne pas toucher au compas qui est alors sûrement faux, ou bien de lui faire subir une correction hasardeuse, à un moment où il faudrait pouvoir compter absolument sur son compas, surtout si l'on approche d'une côte ou de parages dangereux. On sera à la merci d'une erreur portant, soit sur la position exacte du navire, soit sur la lecture de la Carte magnétique, ou de la Table de correction, soit enfin sur la lecture de l'échelle donnant la distance du centre des correcteurs au centre du compas. Il n'y a pas d'instrument qui soit complètement à l'abri d'une erreur accidentelle et l'on peut commettre une erreur de cette nature dans le placement des correcteurs d'un compas Thomson. Mais il y a peu de chances pour qu'on ne soit amené à s'en apercevoir, avant de se trouver dans les circonstances de navigation difficile et sans moyens de contrôle, dans lesquelles nous venons d'envisager l'emploi d'un compas de grand moment magnétique.

30. Remarquons pour terminer que cet inconvénient disparaîtrait et que la compensation jouirait des mêmes avantages que celle d'un compas Thomson, si l'on faisait usage de compensateurs beaucoup plus gros placés plus loin. Cela résulte de la présence de b^6 au dénominateur du vecteur que nous avons désigné par φ_4 , et qui représente l'action des correcteurs aimantés par le compas, tandis que le vecteur φ_3 varie comme $\frac{1}{b^3}$. Seulement cela conduirait à un encombrement tout à fait inacceptable; de plus les correcteurs, placés loin du compas, ne se trouveraient pas dans le même champ que lui et toute théorie deviendrait impossible. Précisons cette remarque par un exemple; avec un compas Thomson, il faut, pour compenser une déviation quadrantale de 20° , mettre des globes de 305^{mm} de diamètre à 30^{cm} , 25 du compas (dis-

tance du centre du compas au centre des globes) ⁽¹⁾. Dans ces conditions le vecteur φ_4 est considéré comme négligeable vis-à-vis de φ_1 et φ_3 . Si l'on emploie un compas de moment magnétique 3000, c'est-à-dire 15 fois plus grand que celui d'un compas Thomson, il faut, pour conserver les mêmes valeurs à φ_1 , φ_3 et φ_4 , employer des globes de rayon a' à une distance b' , a' et b' étant donnés par les relations

$$\frac{a'}{b'} = \frac{15,25}{30,25},$$

$$\frac{b'^3}{b^3} = 15.$$

On aura donc

$$b' = 30,25 \sqrt[3]{15} = 30,25 \times 3,872 = 117^{\text{cm}},$$

$$a' = 59^{\text{cm}}.$$

Il faudrait donc employer des globes de 1^m,18 de diamètre et placés de manière que leurs centres fussent à 1^m,17 du centre du compas. L'encombrement horizontal serait de 3^m,50. Il est évident que c'est absolument impraticable.

TROISIÈME PARTIE.

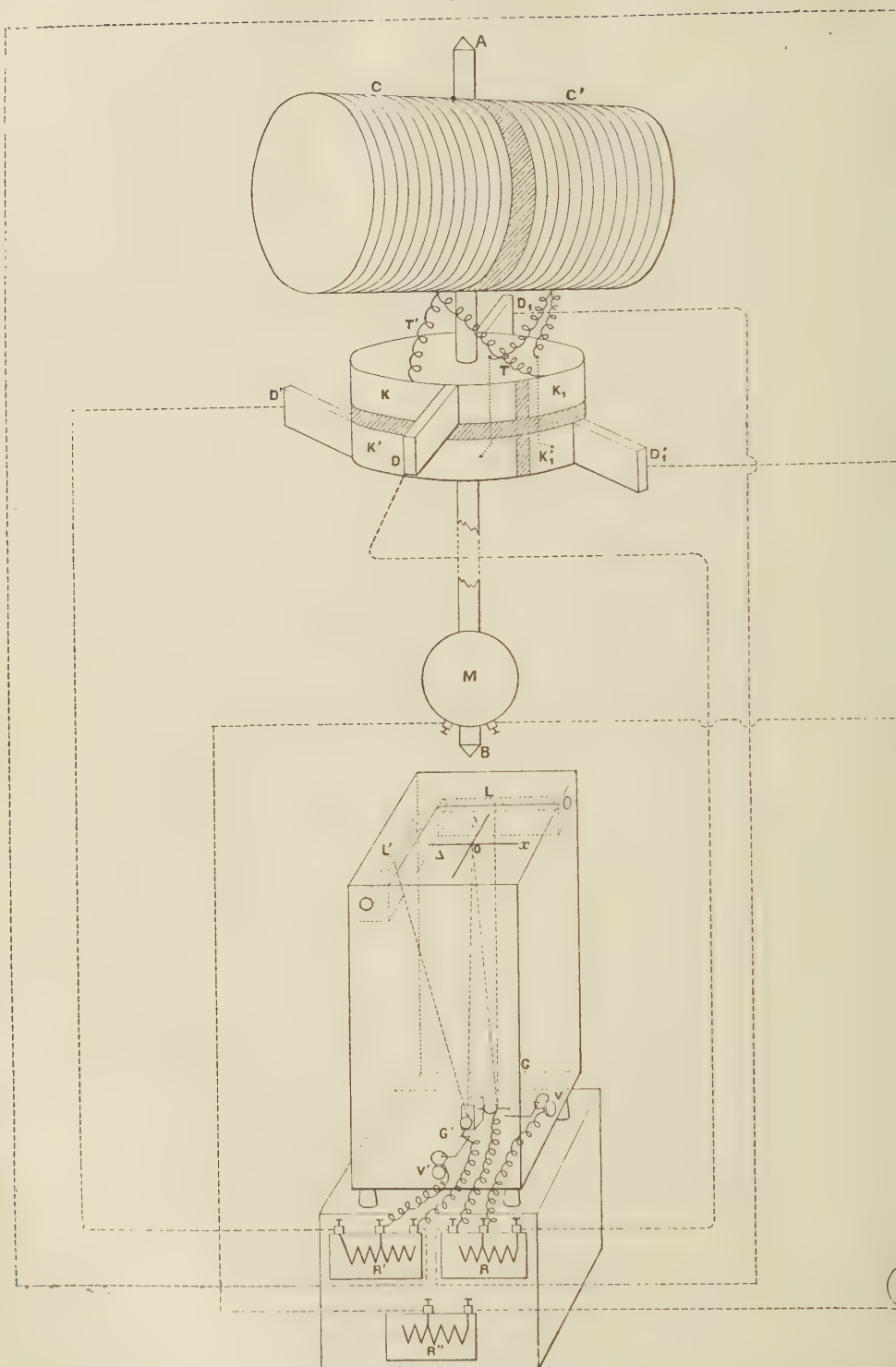
CHAPITRE I.

COMPAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

1. *Principe.* — Le principe est celui de l'inducteur terrestre. Un circuit conducteur C (*fig.* 28) enroulé sur une bobine est animé d'un mouvement de rotation rapide

(1) D'après la Table du commandant Guyou (*Manuel des instruments nautiques*).

Fig. 28.



et uniforme autour d'un axe vertical AB à l'extrémité duquel se trouve un petit moteur M, alimenté par le courant électrique du bord. Ce moteur, du type des moteurs de ventilation, est cuirassé, et l'arbre AB est assez long pour que l'influence magnétique du moteur sur le champ dans lequel tourne le circuit C soit négligeable. L'arbre AB est solidaire d'un collecteur formé de deux demi-bagues conductrices K, K₁ auxquelles sont reliées les extrémités du circuit C. Les demi-bagues sont isolées l'une de l'autre par des touches T et T₁ diamétralement opposées; le plan passant par l'axe AB et le milieu des touches est parallèle aux spires; sur le collecteur frottent deux balais D et D₁ dont les contacts sur le collecteur sont aussi diamétralement opposés; ces contacts ont une largeur égale à celle des touches. Ces balais sont montés dans des porte-balais fixés sur le bâti qui porte toute la partie tournante, bâti lui-même solidaire du navire. Les balais D et D₁ sont reliés à un galvanomètre à cadre mobile G, par l'intermédiaire d'une boîte de résistance à plots R. Le miroir concave de ce galvanomètre, monté sur pivots et du type des milliampèremètres employés en télégraphie sans fil, forme sur la glace dépolie Δ l'image O*x* du filament d'une lampe à incandescence L (¹).

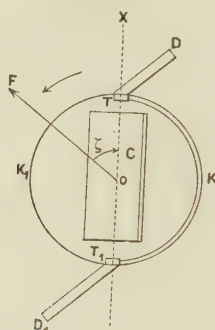
On voit sur la figure 28 que tout ce montage est doublé; la bobine tournante porte un second enroulement C' identique, autant que possible du moins, à l'enroulement C, et relié aux demi-bagues K', K'₁ isolées l'une de l'autre et des demi-bagues K et K₁; une paire de balais D', D'₁, dont les contacts sont dans un plan perpendiculaire à ceux de D, D', envoie dans un galvanomètre G' le courant d'induction de l'enroulement C'; l'axe de rotation de ce galvanomètre est perpendiculaire au premier et son miroir

(¹) Il faut employer des lampes à long filament rectiligne; des lampes de ce genre sont fabriquées par la maison Hartmann et Braun.

concave forme sur la glace Δ l'image Oy du filament de la lampe L' ; Ox et Oy sont rectangulaires. Nous verrons plus loin l'utilisation de ce deuxième circuit.

2. Considérons, en projection horizontale, le circuit C , le collecteur K, K_1 , les touches T, T_1 et les balais D, D_1 (*fig. 29*). Prenons pour origine du temps le moment où

Fig. 29.



les balais recouvrent exactement les touches. Soit F le champ magnétique au centre de la bobine tournante; on suppose qu'à tous les caps ce champ est réparti uniformément dans l'espace occupé par la bobine; dans les endroits voisins de pièces de fer importantes, il faudra donc que la bobine ne soit pas trop grande. Soit ζ l'angle du champ et de la ligne OX qui passe par l'axe de rotation et le milieu des surfaces de contact des balais. L'angle ζ' que OF fait avec le plan des spires à l'instant t est donc

$$(1) \quad \zeta' = \omega t + \zeta,$$

en supposant que le sens de rotation est celui qu'indique la flèche et que le sens positif pour compter les angles est, suivant l'usage dans l'emploi des compas, celui du mouvement des aiguilles d'une montre.

Au temps zéro, aucun courant ne passe dans le circuit, puisqu'il est coupé par les touches isolantes T, T_1 ; puis

la résistance au contact diminue de l'infini à une valeur constante très petite que nous désignerons par r_2 ; la résistance totale du circuit diminue de l'infini à

$$r_0 = r_1 + r_2,$$

r_1 étant la résistance du circuit C , du galvanomètre et des fils de connexion; la résistance reste égale à r_0 jusqu'à ce que la touche T_1 vienne au contact du balai D ; elle augmente alors de r_0 à l'infini.

Calculons la quantité q d'électricité qui circule dans le circuit pendant un demi-tour, c'est-à-dire de $t = 0$ à $t = \frac{\pi}{\omega}$; soit i le courant à l'instant t ; on a

$$q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i \, dt,$$

et le courant i satisfait à chaque instant à l'équation

$$L \frac{di}{dt} + ri - e = 0,$$

L étant le coefficient de self-induction du circuit, r sa résistance à l'instant t , e la force électromotrice d'induction, de sorte que

$$(2) \quad q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{e}{r} \, dt - L \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1}{r} \frac{di}{dt} \, dt.$$

Si S est la somme des surfaces des spires, on a

$$e = - \frac{d}{dt} FS \sin(\omega t + \zeta) = - F \omega S \cos(\omega t + \zeta).$$

En première approximation nous supposons, pour le calcul de l'expression (2), que r est constamment égal à r_0 ; l'intervalle de temps pendant lequel r varie est, en effet, très petit par rapport à celui où r reste constant sans que les courants pendant les deux intervalles soient

d'ordres de grandeur différents. On a alors

$$q = -\frac{1}{r_0} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} F \omega S \cos(\omega t + \zeta) dt - \frac{L}{r_0} \left(i_{\frac{\pi}{\omega}} - i_0 \right)$$

ou

$$q = \frac{2FS}{r_0} \sin \zeta,$$

puisque

$$i_0 = i_{\frac{\pi}{\omega}} = 0.$$

La quantité totale d'électricité qui sera envoyée dans le galvanomètre par seconde, c'est-à-dire pendant $2N$ demi-tours, sera donc égale à celle qu'y ferait passer un courant continu d'intensité

$$(3) \quad I = \frac{4NSF}{r_0} \sin \zeta.$$

Comme la durée d'oscillation du galvanomètre est grande par rapport à la durée de révolution de la bobine tournante, l'image Ox sur la glace dépolie prendra une position fixe correspondant à cette intensité et coupant l'axe Oy à une distance y de O ,

$$(4) \quad y = \frac{4NSFG}{r_0} \sin \zeta,$$

G étant le coefficient de sensibilité du galvanomètre.

3. Cherchons maintenant à nous rendre compte du degré d'approximation de la formule (3). On peut écrire exactement, en désignant par α l'angle sous-tendu par une touche isolante,

$$q = \frac{2FS}{r_0} \sin \zeta + \int_0^{\frac{\alpha}{\omega}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left(e - L \frac{di}{dt} \right) dt \\ + \int_{\frac{\pi}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left(e - L \frac{di}{dt} \right) dt.$$

Si l'on connaissait la manière dont r varie avec la surface de contact des balais sur les demi-bagues K, K_1 et par conséquent avec le temps, on pourrait calculer i pour chaque instant des intervalles $(0, \frac{\alpha}{\omega})$ et $(\frac{\pi - \alpha}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$; on pourrait donc calculer chacune des intégrales qui figurent dans cette expression.

Mais on peut éviter ce long calcul en remarquant d'abord qu'on peut remplacer les limites entre lesquelles sont prises les deux intégrales par des limites plus rapprochées.

L'expérience montre, en effet, que la position d'une des images sur la glace dépolie ne varie que d'une quantité inappréciable à l'œil quand on intercale dans le circuit, au moyen de la boîte de résistance R , une résistance de quelques ohms, de l'ordre de 5ω par exemple. Par conséquent, aussitôt que la résistance au contact des balais deviendra inférieure à 5ω , nous pourrons négliger cette résistance et supposer que la résistance totale du circuit est constante.

Supposons alors que la résistance au contact, pendant le passage des touches sous les balais, varie en raison inverse de la surface de contact des balais avec les demi-bagues conductrices, K, K_1 , c'est-à-dire en raison inverse de t pendant l'intervalle $0, \frac{\alpha}{\omega}$.

Cette hypothèse n'est certainement pas éloignée de la vérité et nous la prendrons comme deuxième approximation. Soit ρ la résistance au contact pendant l'intervalle $0, \frac{\alpha}{\omega}$; on pourra écrire

$$\rho = \frac{r_2 \alpha}{\omega} \frac{1}{t},$$

puisque ρ doit être égal à r_2 pour $t = \frac{\alpha}{\omega}$. La résistance r_2 est de l'ordre de $0\omega,1$ avec des balais en charbon cuivré;

le temps θ au bout duquel la résistance ρ est inférieure à 5ω est donc

$$\theta = \frac{\alpha}{\omega} \frac{0,1}{5} = \frac{\alpha}{\omega} 0,02.$$

On peut donc prendre les intégrales de l'expression complète de q entre les limites

$$\left(0, \frac{\alpha'}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega} 0,02\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\pi - 0,02\alpha}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Dans ces intervalles, nous augmenterons la valeur absolue des termes correctifs en supposant que r est constamment infini; le premier terme correctif est alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r_0} \int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \left(e - L \frac{di}{dt}\right) dt &= -\frac{1}{r_0} \int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} F \omega S \cos(\omega t + \zeta) dt \\ &\quad + \frac{L}{r_0} i_{\alpha'} \\ &= \frac{FS}{r_0} \left[\sin(\zeta + \alpha') - \sin \zeta + \frac{L}{FS} i_{\alpha'} \frac{\omega}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Le second terme correctif est de même

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r_0} \int_{\frac{\pi - \alpha'}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(e - L \frac{di}{dt}\right) dt \\ = \frac{FS}{r_0} \left[-\sin \zeta + \sin(\zeta - \alpha') - \frac{L}{FS} i_{\pi - \alpha'} \frac{\omega}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$q = \frac{FS}{r_0} \left[\sin(\zeta + \alpha') + \sin(\zeta - \alpha') + \frac{L}{FS} \left(i_{\alpha'} - i_{\pi - \alpha'} \right) \right].$$

Calculons maintenant

$$\frac{i_{\alpha'}}{\omega} - \frac{i_{\pi - \alpha'}}{\omega}.$$

Dans l'intervalle $\left(0, \frac{\alpha'}{\omega}\right)$ on a

$$i = -e^{-\int_0^t \frac{r}{L} dt} \int_0^t \frac{F \omega S}{L} \cos(\omega t + \zeta) e^{\int_0^t \frac{r}{L} dt} dt,$$

d'où

$$i_{\frac{\alpha'}{\omega}} = - \frac{e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt} \int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{F \omega S}{L} \cos(\omega t + \zeta) dt}{e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt}},$$

ε désignant une valeur de t comprise entre 0 et $\frac{\alpha'}{\omega}$, ou encore

$$i_{\frac{\alpha'}{\omega}} = \frac{e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt}}{e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt}} \frac{FS}{L} [\sin \zeta - \sin(\zeta + \alpha')].$$

Calculons l'ordre de grandeur de

$$e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt}.$$

On a, en adoptant l'hypothèse faite pour r ,

$$\begin{aligned} e^{\int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \frac{r}{L} dt} &= e^{\frac{1}{L} \int_0^{\frac{\alpha'}{\omega}} \left(r_1 + \frac{r_2 \alpha}{\omega t}\right) dt} \\ &= e^{\frac{r_1}{L} \left(\varepsilon - \frac{\alpha'}{\omega}\right)} e^{\frac{r_2 \alpha}{\omega L} \text{Log} \frac{\varepsilon}{\frac{\alpha'}{\omega}}} \\ &= e^{\frac{r_1}{L} \left(\varepsilon - \frac{\alpha'}{\omega}\right)} \left(\frac{\varepsilon \omega}{\alpha'}\right)^{\frac{r_2 \alpha}{\omega L}}. \end{aligned}$$

Quand ε varie de 0 à $\frac{\alpha'}{\omega}$, cette quantité croît de 0 à 1; nous désignerons sa valeur par m . On a donc

$$i_{\frac{\alpha'}{\omega}} = \frac{FS}{L} m [\sin \zeta - \sin(\zeta + \alpha')] \quad (0 < m < 1).$$

Dans l'intervalle $\frac{\pi - \alpha'}{\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$, on a de même

$$i = -e^{-\int_t^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{r}{L} dt} \int_t^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{F \omega S}{L} \cos(\omega t + \zeta) e^{\int_t^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{r}{L} dt} dt.$$

d'où

$$\frac{i\pi - \alpha'}{\omega} = \frac{FS}{L} m' [\sin \zeta - \sin(\zeta - \alpha')] \quad (0 < m' < 1).$$

On a donc finalement

$$q = \frac{FS}{r_0} \left\{ \sin(\zeta + \alpha') + \sin(\zeta - \alpha') \right. \\ \left. + m[\sin \zeta - \sin(\zeta + \alpha')] - m'[\sin \zeta - \sin(\zeta - \alpha')] \right\}$$

ou

$$q = \frac{aFS}{r_0} \sin(\zeta + \varphi),$$

en posant

$$\begin{cases} a \sin \varphi = -(m + m') \sin \alpha', \\ a \cos \varphi = 2 \cos \alpha' + (m - m')(1 - \cos \alpha'). \end{cases}$$

Or, les touches ont une largeur de 2^{mm} environ pour un collecteur de 2^{cm} de rayon; donc

$$\alpha = \frac{1}{10}, \quad \alpha' = 2 \cdot 10^{-3};$$

on peut alors négliger le terme $(m - m')(1 - \cos \alpha')$ et l'on a

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{-(m + m')}{2} \tan \alpha', \\ a &= \sqrt{4 \cos^2 \alpha' + (m + m') \sin^2 \alpha'}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que

$$\begin{aligned} \varphi &< \alpha' \quad \text{ou} \quad \varphi < 7', \\ a &= 2 \quad \text{à } 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ près.} \end{aligned}$$

Ainsi donc la conclusion à laquelle nous arrivons est qu'avec une exactitude très supérieure à celle à laquelle

il est nécessaire d'atteindre, on a, pour la déviation de l'un des galvanomètres,

$$y = \frac{4NSFG}{r_0} \sin \zeta \quad (1).$$

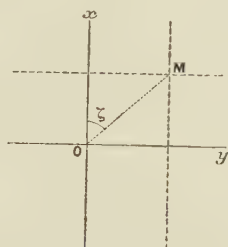
4. Une théorie identique à celle-ci nous donnera pour la déviation de l'autre galvanomètre

$$x = \frac{4NS'FG'}{r'_0} \cos \zeta,$$

puisque les balais correspondants sont calés à angle droit des premiers.

x et y sont les coordonnées du point M de rencontre des deux images lumineuses sur la glace dépolie (*fig.* 30)

Fig. 30.



quand la bobine tournante est en mouvement, en supposant que ces images occupent les positions Ox , Oy quand la bobine ne tourne pas.

Si l'on a

$$(5) \quad \frac{SG}{r_0} = \frac{S'G'}{r'_0},$$

(¹) Dans l'appareil actuellement construit et dont on va voir ci-après la description, cette conclusion n'est pas malheureusement tout à fait valable, à cause d'une fâcheuse disposition des deux circuits à laquelle on n'avait pas d'abord pris garde et qui donne une importance non négligeable à la réaction mutuelle des deux bobines. (*Voir*, à ce sujet, la Note II.)

l'angle de Ox avec le rayon OM est égal à l'angle ζ , car on a

$$\text{tang}(xOM) = \frac{y}{x} = \text{tang}\zeta.$$

Or, si le plan de symétrie longitudinal du navire est parallèle au plan passant par l'axe de rotation AB et le milieu des surfaces de contact des balais D, D_1 , l'angle ζ sera le cap au compas du navire, pour l'endroit de celui-ci où la bobine tournante a été placée. Ce cap au compas sera connu par une lecture directe sur la glace dépolie Δ graduée en degrés comme une rose; cette lecture du cap sera indépendante de l'intensité de la composante horizontale F , ainsi que du nombre de tours du moteur M , lequel peut varier suivant le voltage disponible sur le réseau électrique du bord et suivant l'état de graissage du moteur M . Si l'on s'était proposé de déterminer le cap, c'est-à-dire l'angle ζ , en employant un seul circuit tournant et un seul galvanomètre, et en utilisant la relation

$$v = \frac{4NSFG}{r_0} \sin\zeta,$$

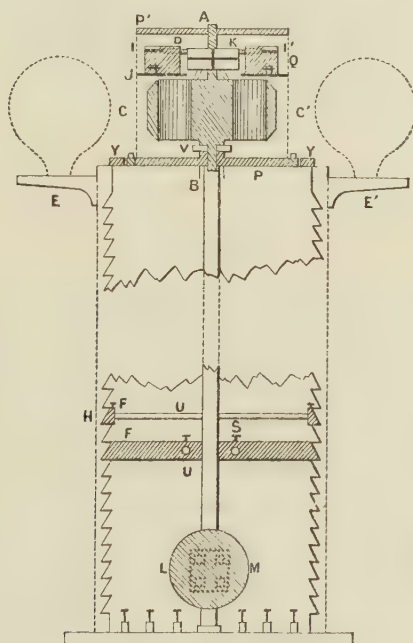
la correspondance entre la lecture y au galvanomètre et le cap ζ aurait été variable suivant les valeurs de F et de N .

Cette méthode suppose la relation (5) vérifiée; or, par construction, les quantités S, G, S', G' sont voisines, mais ne peuvent être rigoureusement égales; les boîtes de résistance R et R' (*fig.* 28) intercalées dans les deux circuits permettant de réaliser facilement la condition demandée, puisqu'on peut faire varier dans des limites largement suffisantes les résistances r_0 et r'_0 . On verra plus loin comment ce réglage est pratiquement exécuté quand il y a lieu.

5. L'ensemble constitué par la bobine tournante, le collecteur, les balais et leurs porte-balais, l'axe AB et le

moteur M peut être nommé *transmetteur*. Sous la forme que lui a donnée M. Carpentier, il est représenté sur la figure 31. Une caisse rectangulaire en bois H porte une platine P sur sa face supérieure; sur cette platine est fixé le boisseau Q muni de la plate-forme J et surmonté de la potence P'. Deux trous percés, l'un dans la platine P et l'autre dans la potence P', laissent passer l'axe AB de la

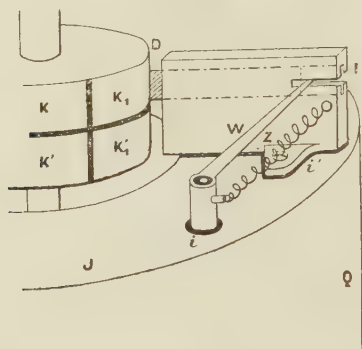
Fig. 31.



double bobine CC'; une rondelle V adoucit le frottement du palier de la platine. On voit en K le double collecteur, en D les balais (une seule paire a été figurée), contenus dans leurs porte-balais I qui sont montés sur la plate-forme J. Il est indispensable que le contact des balais ne se déplace pas par rapport au bâti de l'appareil quand les balais s'usent; à cet effet, les balais, en argent ou en char-

bon cuivrés, ont la forme de lames de 2^{mm} d'épaisseur environ, guidées dans une rainure du porte-balai I, comme l'indique la figure 32; la pression du balai sur le collecteur

Fig. 32.



est assurée au moyen du levier W monté sur la plate-forme J, et d'un ressort à boudin Z; le porte-balai et le levier sont isolés de la plate-forme J par les pièces i , i' .

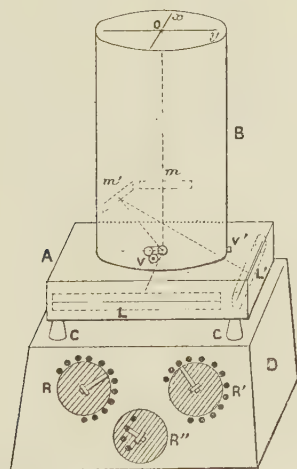
Le boisseau Q est fixé sur le fond supérieur de la caisse au moyen de vis de pression. Son bord inférieur porte un trait de repère; en desserrant les vis, on peut faire tourner le boisseau sur lui-même d'un angle connu par le déplacement du trait de repère devant un anneau Y portant une graduation en degrés. Quand le repère est devant le zéro de la graduation, une paire de balais a ses contacts dans le plan de la figure.

Au bas de la caisse H, qui a $1^{\text{m}}, 20$ environ de hauteur, se trouve le moteur M fixé à la paroi de la caisse par une plaque L. L'arbre du moteur est lié à l'arbre de la bobine par un tube de laiton S au moyen d'emmanchements à baïonnette. Cette caisse porte deux potences E, E' sur lesquelles on peut placer des sphères compensatrices en fer doux. Enfin, sur les mêmes parois, mais à l'intérieur de la caisse, se trouvent des échelons en bois sur lesquels

on peut placer des traverses de bois F soit dans un sens, soit dans l'autre; ces traverses sont percées de trous dans lesquels on peut passer des barreaux aimantés U soit longitudinaux, soit transversaux. Au bas de l'appareil sont les bornes du moteur, des bornes reliées aux balais D, D₁ et d'autres reliées aux balais D', D'₁.

6. Le *récepteur*, représenté schématiquement au bas de la figure 28, est constitué par une boîte métallique plate A (*fig.* 33) contenant les galvanomètres; cette boîte

Fig. 33.



est surmontée d'un large tube B de 0^m,50 de longueur environ, fermé à sa partie supérieure par la glace dépolie. Au lieu de placer les lampes L, L' en haut de ce tube, comme dans la figure 28, elles ont été placées, dans le modèle construit par M. Carpentier, dans la boîte des galvanomètres, comme l'indique la figure 33; des miroirs *m* et *m'* renvoient leur lumière sur les miroirs concaves des galvanomètres qui forment les images des filaments incandescents sur la glace dépolie en Ox, Oy.

La boîte A repose, par l'intermédiaire de grosses cales

de caoutchouc C, sur une caisse en bois D qui contient les résistances de réglage R, R' permettant de vérifier la relation (5) (ou de donner à ses deux membres des valeurs convenables suivant qu'on veut employer l'un ou l'autre des deux modes de compensation qui suivent); ce sont des boîtes à plots permettant de faire varier la résistance mise en série avec un des circuits tournants et le galvanomètre correspondant de 20^{ω} en 20^{ω} jusqu'à 600^{ω} , la résistance de ces circuits (galvanomètre et bobine tournante) étant de l'ordre de 400^{ω} . Le rhéostat à plots R'' est traversé par le courant d'alimentation du moteur et permet de régler sa vitesse.

En V et V' sont des têtes de vis qui permettent le réglage de la position de zéro des galvanomètres.

Tout l'ensemble est placé sur une épaisseur de quelques centimètres de feutre. L'expérience a montré que le système de feutre et des cales de caoutchouc constitue un amortisseur très suffisant des vibrations du navire pour obtenir une fixité complète des images, et protéger les pivotages délicats des galvanomètres.

7. Le transmetteur est destiné à être placé en un endroit du navire protégé des coups et où, cependant, le champ magnétique ait des qualités de fixité et de stabilité suffisantes. On verra plus loin les résultats obtenus sur le cuirassé *Patrie* pour un certain nombre de points de ce bâtiment. Les endroits en question se trouvent dans les fonds du navire, bien en dessous de la flottaison; un transmetteur qui y serait placé aurait des chances de n'être détruit qu'avec le navire tout entier. Le récepteur doit être placé dans le blockhaus, sous les yeux du commandant et de l'homme de barre. On a donc ainsi dans le blockhaus l'indication du cap magnétique prise en un point extérieur au blockhaus. Les six fils de connexion du transmetteur et du récepteur doivent naturellement passer dans le tube cuirassé qui fait communiquer, par trans-

missions électriques, hydrauliques ou acoustiques, le blockhaus avec tous les points principaux du navire.

Au lieu d'installer le transmetteur dans les fonds du navire, ce qui permet d'avoir le cap magnétique pendant le combat, on peut le garder en réserve pour s'en servir différemment après le combat. Bien qu'il semble évident que, même pendant le combat, l'usage du compas soit nécessaire, puisque le combat pourra avoir souvent pour but de forcer un passage (exemple Tsoushima), certains marins pensent que, pendant le combat même, un compas servira peu (à la condition de n'effectuer que des évolutions d'escadre très simples); mais en tout cas il sera indispensable d'avoir un compas compensé pour la navigation qui suivra, d'autant plus indispensable que cette navigation pourra être plus périlleuse et que le temps sera plus pressant. Qu'on s'imagine une escadre, sans compas compensé, absolument obligée d'entrer le plus rapidement possible dans certaines rades par temps de brume? Le transmetteur pourrait alors être placé, après le combat, sur le pont, n'importe où, dans des conditions magnétiques très favorables, et les méthodes de compensation extrêmement rapides que nous indiquons ci-après permettraient, au bout de quelques minutes, une demi-heure au plus, de lire au récepteur, placé dans le blockhaus, le cap magnétique vrai.

Sur les sous-marins on placerait le transmetteur dans un tube de bronze émergeant de la coque de manière que les bobines en soient à une distance d'environ 1^m,20; ce tube pourrait être placé en un point suffisamment éloigné du capot et du périscope pour que les déplacements de ces appareils ne changent pas le champ magnétique dans lequel il se trouverait, assez loin aussi des dynamos pour que fût insensible leur influence contre laquelle d'ailleurs la coque constituerait un écran magnétique au moins partiel. Le récepteur serait placé sous les yeux du comman-

dant. Une méthode de compensation qu'on verra plus loin et qui ne fait usage d'aucun correcteur, ne mettant en jeu que les organes de réglage du récepteur, sera dans ce cas particulièrement appréciable, puisqu'elle ne nécessitera pas qu'on atteigne le transmetteur.

Pour les paquebots, cet appareil peut aussi présenter des avantages sur les compas actuellement employés, non pas pour les remplacer, mais pour fournir des indications utiles qu'ils ne donnent pas. Ainsi un navire destiné à naviguer pendant plusieurs jours par la brume, sans pouvoir faire le point par conséquent, a besoin de s'assurer que ses compas sont bien compensés; notre appareil, dont la compensation n'exige pas, comme on va le voir, la connaissance du méridien magnétique, pourrait servir à ce point de vue comme contrôleur des compas du bord. De plus, la force qui fixe les positions d'équilibre des galvanomètres étant, par rapport à l'inertie des cadres mobiles, énormément plus grande que le couple directeur d'une rose magnétique, le point de croisement des images lumineuses, qui indique le cap, suit sans aucun retard toutes les embardées du navire et doit permettre, par conséquent, de gouverner avec plus de précision. Enfin, un récepteur pourrait être installé dans les appartements du commandant du paquebot, qui pourrait ainsi, chaque fois qu'il le désirerait, vérifier la route suivie par son bâtiment et s'assurer que l'homme de barre gouverne bien.

CHAPITRE II.

COMPENSATION.

8. Lorsque le navire fait un tour d'horizon, le point de croisement des traits lumineux décrit sur la glace dépolie du récepteur une courbe fermée. Comme on l'a vu, les coordonnées de ce point de rencontre M, par

rapport aux axes rectangulaires représentés par les positions d'équilibre des images, sont

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{4NS'G'F}{r_0'} \cos \zeta, \\ y = \frac{4NSGF}{r_0} \sin \zeta, \end{cases}$$

ζ étant l'angle du champ magnétique F au centre du transmetteur avec une des paires de balais, celle dont les contacts sont dans un plan parallèle au plan de symétrie longitudinal.

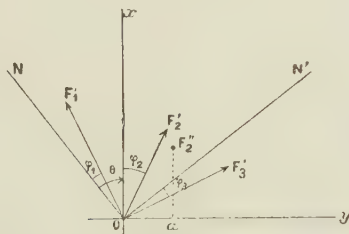
Si l'on rend l'axe Ox parallèle à ce plan et si la relation (5) est vérifiée $\left(\frac{SG}{r_0} = \frac{S'G'}{r_0'}\right)$, les formules (6) nous montrent que OM est équipollent au champ magnétique F , car le vecteur OM fait avec Ox l'angle ζ , comme nous l'avons vu, et l'on a de plus

$$OM = \frac{4NSG}{r_0} F.$$

Le lieu géométrique du point M est donc homothétique à la courbe que décrit l'extrémité du vecteur F . C'est par définition un dygogramme (diagramme de la force et de l'angle ou dynamogoniogramme).

Il est facile de voir que c'est un dygogramme elliptique.

Fig. 34.



Décomposons en effet le champ magnétique F suivant les trois composantes F_1, F_2, F_3 analysées par le commandant

Guyou (voir § 4, I^{re} Partie). Sur la glace dépolie du récepteur il correspond à chacune de ces forces un vecteur équipollent OF'_1 , OF'_2 , OF'_3 (*fig.* 34). Ceci veut dire que, si chacune des composantes F_1 , F_2 , F_3 agissait seule au centre du transmetteur, le point de croisement des traits lumineux sur la glace dépolie du récepteur prendrait successivement les positions F'_1 , F'_2 , F'_3 . Sur cette glace dépolie le vecteur OF'_2 est fixe comme le vecteur F_2 est fixe dans le navire; les points F'_1 et F'_3 décrivent respectivement des cercles. En appelant θ l'angle de ON dirigé vers le Nord avec Ox (cap magnétique vrai), les coordonnées du point de croisement M sont donc, en réalité,

$$\begin{aligned} x &= F'_2 \cos \varphi_2 + F'_1 \cos(\theta + \varphi_1) + F'_3 \cos(\theta + \varphi_3), \\ y &= F'_2 \sin \varphi_2 - F'_1 \sin(\theta + \varphi_1) + F'_3 \sin(\theta + \varphi_3), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x &= F'_2 \cos \varphi_2 + A \cos \theta + B \sin \theta, \\ y &= F'_2 \sin \varphi_2 + A' \cos \theta + B' \sin \theta. \end{aligned}$$

Il est évident, d'après ces formules, que le point (x, y) décrit une ellipse de centre F'_2 .

Il est clair que le point M est à l'extrémité d'un des axes quand les vecteurs OF'_1 et OF'_3 ont la même direction et des sens identiques (grand axe) ou opposés (petit axe). Le grand axe L a donc pour longueur

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= 2(F'_1 + F'_3) = \frac{8 \text{ NSG}}{r_0} (F_1 + F_3), \\ &\text{et le petit axe M} \\ M &= 2(F'_1 - F'_3) = \frac{8 \text{ NSG}}{r_0} (F_1 - F_3). \end{aligned} \right.$$

De ces formules on peut tirer F_1 et F_3 si l'on connaît S, N, G, r_0 et si l'on mesure, sur le graphique obtenu en faisant un tour d'horizon, L et M.

Quant à la force F_2 , on la connaît de même en grandeur et direction par le rayon vecteur qui joint le centre de la

glace dépolie au centre de l'ellipse ; la longueur du vecteur est

$$\frac{1}{r_0} \text{NSG} F_2.$$

L'expérience montre que la composante de la force F_1 vers l'Est est toujours très petite et négligeable ; cette force est donc dirigée vers le Nord magnétique. Si les forces F_1 et F_3 ont la même direction, cette direction est, comme on l'a vu dans la première Partie, parallèle au plan de symétrie apparente des fers doux ; l'angle de ce plan avec le plan de symétrie longitudinal du navire est donc égal à l'angle A que fait le grand axe de l'ellipse avec l'axe Ox tracé sur la glace dépolie.

9. Ces propriétés vont nous permettre de trouver, d'une manière extrêmement rapide et simple, comment les correcteurs doivent être disposés par rapport au transmetteur pour compenser le champ au centre des bobines tournantes.

Occupons-nous d'abord des correcteurs en fer doux. On connaît par le graphique l'angle A , que le plan de symétrie apparente des fers doux fait avec l'axe longitudinal du navire ; on sait immédiatement, par une simple mesure au rapporteur, dans quel plan il faut placer les centres des correcteurs.

En réalité, d'ailleurs, pour les compas placés dans l'axe du bâtiment, le plan de symétrie apparente des fers doux coïncide avec le plan de symétrie longitudinal et l'on devra alors placer les correcteurs par le travers du transmetteur si le grand axe de l'ellipse est parallèle à Ox (c'est le cas le plus général) ou dans le plan de symétrie longitudinal si le grand axe de l'ellipse est parallèle à Oy .

Quant à la *puissance compensatrice* des correcteurs à employer, on la connaît facilement en mesurant les axes de l'ellipse sur le graphique obtenu en faisant un tour

d'horizon. On a vu en effet que l'on a

$$\sin \delta_m = \frac{F_3}{F_1} = \frac{L - M}{L + M}.$$

Connaissant δ_m , les Tables indiquent immédiatement quelles dimensions il faut donner aux compensateurs et à quelle distance les placer.

Les correcteurs de fers doux une fois placés, on détermine à nouveau le centre de l'ellipse, que déplace l'aimantation permanente prise par les correcteurs de fers doux sous l'influence de la force F_2 . Une fois le nouveau centre déterminé, il suffit de placer des aimants de manière que le dygogramme soit centré sur la glace dépolie. Il faut pour cela lui faire subir une translation égale à $F_2'' O$, F_2'' étant le nouveau centre (*fig.* 34). Étant à un cap quelconque, on placera des aimants transversaux dans la caisse du transmetteur de manière à déplacer l'image parallèle à Ox d'une quantité égale à αO et des aimants longitudinaux de manière à déplacer l'image parallèle à Oy d'une quantité égale à $F_2'' \alpha$.

Toutefois, cette compensation par des aimants n'est pas valable pour toutes les latitudes. Il faut y adjoindre une barre de Flinders. Le modèle actuellement construit de notre appareil n'en comporte pas, car il était simplement destiné à des essais en escadre. On verra dans la Note III que le placement de cette barre se ferait aussi avec une grande facilité.

10. La courbe obtenue, en faisant effectuer au navire un tour d'horizon, permet donc, on le voit, d'effectuer la compensation d'une manière complète et très rapide — complète à la très petite erreur constante près qui résulte de ce qu'on a négligé la composante de la force F_1 vers l'Est. Il n'a été besoin pour cela d'aucune observation extérieure au navire ; c'est seulement si l'on voulait faire cette petite correction qu'il faudrait connaître le méridien

magnétique vrai ; tous les compas magnétiques, du reste, sont soumis à la même nécessité. Enfin, du moment qu'il n'est pas nécessaire de connaître les caps magnétiques successivement tenus par le navire, ce tour d'horizon peut être effectué d'un mouvement continu, c'est-à-dire, si le navire évolue par ses propres moyens, avec sa vitesse normale, en quelques minutes.

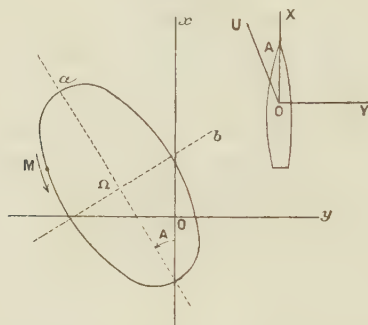
Ainsi, par exemple, un paquebot naviguant depuis plusieurs jours dans la brume désire vérifier l'état de la compensation de son compas (le compas électromagnétique pouvant être employé comme compas de route ou comme contrôleur des autres compas du bâtiment) ; il fait un tour d'horizon d'un mouvement continu et recueille ainsi tous les éléments nécessaires et suffisants pour vérifier ou rectifier la compensation. Un navire est obligé, pour une raison quelconque, de quitter une rade sans compas compensé, faute d'avoir eu le temps de mettre en pratique la méthode habituelle de compensation, fort longue, comme on l'a vu ; au sortir de la rade, il ne lui faudra que quelques minutes pour parcourir son cercle de giration avant de se mettre en route. De même, enfin, si après un combat l'état magnétique d'un cuirassé est plus ou moins modifié, un tour d'horizon lui permettra d'avoir un compas compensé, grâce auquel la navigation ultérieure sera rendue beaucoup plus sûre.

11. On peut donc, au moyen de cet appareil, compenser très facilement l'action perturbatrice du navire au centre du compas ou des bobines du transmetteur. Mais on peut aussi, comme nous allons le voir maintenant, *se dispenser de cette compensation en réglant l'appareil de telle manière que ses indications soient équivalentes à celles d'un compas compensé.*

Supposons donc que le transmetteur ait été installé en un certain lieu du navire, les contacts de la paire de balais liée au galvanomètre donnant une image longitudinale

étant eux-mêmes dans un plan parallèle au plan de symétrie longitudinal du navire. On fait un tour d'horizon, par exemple dans le sens NES, et l'on obtient le dygogramme (*fig. 35*). Sur la glace dépolie, fixe par rapport au navire,

Fig. 35.



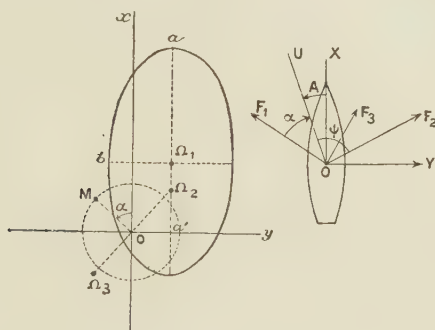
le vecteur OM qui représente le champ magnétique tourne dans le sens de la flèche. Le point M atteint le sommet du grand axe quand le plan de symétrie apparente des fers doux OU est dirigé vers le Nord.

Mesurons l'angle A en le comptant à partir de Ox, positivement vers la droite, et faisons tourner de l'angle A le boisseau Q (*fig. 31 et 32*) sur lequel sont montés les porte-balais, en observant pour cette rotation la même convention de signe que pour l'angle A; elle sera positive dans le sens des aiguilles d'une montre et négative dans le sens opposé. Pour que cette rotation soit exactement mesurable, l'embase de ce boisseau, qui repose sur le fond supérieur P de la caisse du transmetteur (*fig. 31*), porte un trait de repère dans le plan des contacts de la paire de balais longitudinale; ce trait se déplace devant une graduation en degrés tracée sur le cercle YY. On peut fixer le boisseau dans une position déterminée au moyen de vis de pression.

Une fois que le boisseau a été décalé de l'angle A dans

le sens convenable, les contacts de balais qui se trouvaient dans le plan de symétrie longitudinal se trouvent dans le plan de symétrie apparente des fers doux; si l'on effectuait un second tour d'horizon, on obtiendrait une ellipse dont le grand axe serait parallèle à Ox (*fig.* 36); ce serait la première ellipse, déplacée par une rotation de A autour

Fig. 36.



du point O . Supposons cette ellipse tracée. Si l'on appelle α l'angle de la force F_1 avec le plan de symétrie des fers doux OU et ψ l'angle (constant) que la force F_2 , due à l'aimantation permanente fait avec ce plan, les coordonnées d'un point de l'ellipse seront

$$(10) \quad \begin{cases} x = \frac{4NS'G'}{r'_0} [(F_1 + F_3) \cos \alpha + F_2 \cos \psi], \\ y = \frac{4NSG}{r_0} [(F_1 - F_3) \sin(-\alpha) + F_2 \sin \psi]. \end{cases}$$

Supposons que l'on donne à la résistance r'_0 du circuit galvanométrique qui accuse la plus grande déviation (aa') une valeur r''_0 telle qu'on ait

$$(11) \quad \frac{S'G'}{r''_0} (F_1 + F_3) = \frac{SG}{r_0} (F_1 - F_3);$$

le point de croisement des traits lumineux décrira alors

un cercle de rayon égal au petit axe de l'ellipse et de centre Ω_2 .

Ce réglage est d'ailleurs facile à faire, car, pour un cap quelconque, le rapport des abscisses du point lumineux ou des elongations du trait parallèle à Oy après et avant le changement de résistance est

$$\frac{x'}{x} = \frac{r'_0}{r''_0} = \frac{r'_0}{r_0} \frac{SG}{S'G'} \frac{F_1 - F_3}{F_1 + F_3} = \frac{\frac{SG}{r_0} (F_1 - F_3)}{\frac{S'G'}{r_0} (F_1 + F_3)},$$

ou encore

$$(12) \quad \frac{x'}{x} = \frac{M}{L},$$

L et M étant le grand et le petit axe de l'ellipse. On mesurera donc, sur l'ellipse primitive, L et M ; puis, après le décalage du transmetteur, on mesurera, pour un cap quelconque, la valeur de x ; on calculera x' d'après la relation (12) et l'on introduira des résistances au moyen d'une des boîtes de résistances qui se trouve dans le socle du récepteur (*fig.* 33) de manière à ramener l'elongation de l'image parallèle à Oy de x à x' .

La même formule (12) permet de calculer l'abscisse du centre du cercle Ω_2 ; son ordonnée est la même que celle du centre Ω_1 de l'ellipse redressée; les coordonnées de ce point Ω_1 s'obtiennent elles-mêmes graphiquement en faisant tourner de $-A$ le centre Ω de l'ellipse primitive. Une fois déterminé le point Ω_2 , prenons son symétrique Ω_3 par rapport au centre O de la glace dépolie et, au moyen des vis V et V' (*fig.* 33), amenons les positions de zéro des traits lumineux à se couper sur le point Ω_3 . Si l'on effectuait un nouveau tour d'horizon, on obtiendrait le cercle

$$x = \frac{4NS'G'}{r''_0} (F_1 + F_3) \cos \alpha,$$

$$y = \frac{4NSG}{r_0} (F_1 - F_3) \sin(-\alpha);$$

on aura donc

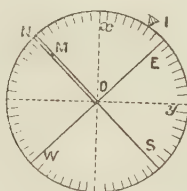
$$\widehat{\text{MO}x} = \frac{y}{x} = \text{tang } -\alpha,$$

$$\widehat{\text{MO}x} = -\alpha,$$

c'est-à-dire, d'après les conventions de signes qui ont été faites, que *le vecteur OM sera dirigé vers le Nord, comme si la compensation du champ avait été faite.*

12. Pour lire commodément le cap du navire, qui n'est pas l'angle α , mais bien l'angle $\alpha - A$ (*fig. 36*), voici com-

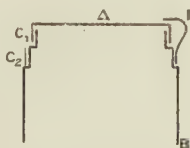
Fig. 37.



ment la glace dépolie est disposée. Elle possède, sur sa circonférence, une graduation en degrés, de 0 à 360 dans le sens des aiguilles d'une montre (*fig. 37*), avec les indications N, E, S, W, le nord de la *rose* correspondant au zéro de la graduation; le rayon qui passe par le zéro est marqué par un espace réservé en clair entre deux traits noirs.

La glace dépolie est montée sur un collier C_1 (*fig. 38*)

Fig. 38.



pouvant tourner autour du tube B qui surmonte (*fig. 33*) la caisse métallique renfermant les galvanomètres du

récepteur. Ce tube B porte un second collier C_2 muni d'un index I dont la pointe arrive sur la graduation de la glace dépolie Δ ; ce collier porte un trait de repère qui se déplace devant une graduation en degrés tracée sur le tube B et dont le zéro est dans le plan de l'axe Ox ou plan de symétrie avant-arrière du récepteur. Connaissant, par le dygogramme que le tour d'horizon a fourni, l'angle A , on fait tourner le collier C_2 de l'angle $-A$, en conservant toujours la même convention de signe, et on le fixe dans cette position. Pour lire le cap on amènera alors le trait blanc *nord* sur le point de croisement M des traits lumineux; la graduation qui se trouve alors devant l'index I donne le cap.

Cette disposition de la glace dépolie paraît également commode pour tenir une route; la route étant donnée, on place la *rose* de manière que le cap à tenir soit devant l'index I et l'on gouverne en maintenant le point de croisement lumineux sur le trait blanc ON.

Si l'on munissait l'index I d'une alidade permettant de faire des visées, ou d'une lunette, ce dispositif permettrait de prendre des relèvements magnétiques aussi aisément qu'avec un compas ordinaire.

13. On pourrait remplacer ce réglage électrique de l'appareil par un réglage géométrique identique à celui que M. Ravier a imaginé ⁽¹⁾ pour lire les caps magnétiques vrais sur une rose ordinaire de compas non compensé.

Supposons qu'au-dessus de la glace dépolie du récepteur on place un œilleton par lequel on regarde le dygogramme tracé sur la glace dépolie. Entre l'œil et la glace, interposons une feuille transparente, une feuille de mica par exemple, sur laquelle sont tracés une série de rayons équidistants issus d'un point O' ; considérons en parti-

(¹) *Théorie géométrique des déviations des compas* (*Revue maritime*, t. CLIII, 1902, p. 592).

culier deux rayons rectangulaires $O'x'$, $O'y'$. Déplaçons la feuille de mica de manière que les axes $O'x'$, $O'y'$ se projettent $O'x'$ sur le grand axe de l'ellipse et $O'y'$ sur le petit axe. Si la feuille de mica est parallèle au plan de la glace dépolie, les coordonnées x' , y' du point de la feuille de mica qui se projette sur le point x, y de la glace dépolie sont

$$x' = k \frac{4NS'G'}{r'_0} (F_1 + F_3) \cos \alpha,$$

$$y' = k \frac{4NSG}{r_0} (F_1 - F_3) \sin(-\alpha),$$

en conservant les notations du paragraphe précédent. Inclignons la feuille de mica autour de l'axe $O'y'$ de manière que le facteur k qui entre dans la formule de x' prenne une valeur k' telle qu'on ait

$$k' \frac{S'G'}{r'_0} (F_1 + F_3) = k \frac{SG}{r_0} (F_1 - F_3).$$

La perspective du dygogramme sur la feuille de mica sera un cercle et l'angle avec $O'x'$ de la perspective de la droite ΩM (*fig.* 35) sera égal à l'angle α du plan de symétrie apparente des fers doux OU avec le champ terrestre. Si nous faisons tourner la feuille de mica dans son plan de l'angle $-A$ et si, à partir de l'axe $O'x'$ marqué sur elle, on la gradue en sens inverse d'une rose de compas, il est clair que le cap lu par projection sera le cap magnétique vrai.

L'ingénieux appareil de M. Ravier est malheureusement, pour les compas magnétiques, d'un emploi peu pratique, comme le fait remarquer son auteur. La raison capitale en est, évidemment, que le compas non compensé est, à certains caps, tout à fait insensible, la force directrice étant trop faible. Cet inconvénient n'existerait pas avec notre récepteur, puisque la position d'équilibre des galva-

nomètres est assurée avec la même force, quelle que soit l'intensité des courants qui les traversent.

14. Pour l'un comme pour l'autre des deux modes de compensation, magnétique ou électrique, le réglage qui permet de rendre effective la relation (5) est d'une importance capitale. Pour le mode de compensation par correcteurs, cela va de soi. Si l'on emploie la seconde méthode, cela est nécessaire aussi pour connaître le plan de symétrie apparente des fers doux ; dans le cas seulement où ce plan serait parallèle au plan longitudinal du navire, il serait indifférent que cette condition fût ou non réalisée pour le tracé du dygogramme qui fournit tous les éléments nécessaires au réglage ; d'ailleurs, pour les compas placés dans l'axe, le plan de symétrie apparente des fers doux coïncide en général avec le plan de symétrie longitudinal.

Il est facile, en effet, de se rendre compte que, si la relation (5) n'est pas vérifiée, le vecteur OM n'est pas, sur la glace dépolie, équipollent au champ magnétique au centre des bobines du transmetteur ; le grand axe de l'ellipse ne fait donc pas avec Ox un angle égal à celui du plan de symétrie des fers doux avec le plan de symétrie longitudinal.

Pour rendre effective la relation (5), il est possible d'employer plusieurs procédés. Nous supposons que le transmetteur et le récepteur ont été l'un et l'autre placés dans leurs postes respectifs ; on effectue par exemple la première installation de l'appareil, et il s'agit de régler les résistances r_0 et r'_0 de telle sorte qu'on ait

$$\frac{S'G'}{r'_0} = \frac{SG}{r_0}.$$

1° Le navire restant au même cap, faisons faire un tour complet au boisseau du transmetteur, qui peut tourner sur lui-même comme on l'a vu ; pendant qu'un aide fait cette opération, suivons le tracé du point lumineux M ;

il décrit la courbe

$$x = \frac{4NS'G'}{r'_0} F \cos \zeta',$$

$$y = \frac{4NSG}{r_0} F \sin \zeta',$$

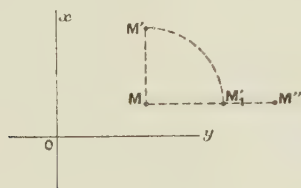
en appelant ζ' l'angle du champ F , constant en grandeur et en direction, puisque le cap est lui-même invariable, avec la paire de balais reliée au galvanomètre longitudinal. Cette courbe est donc une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Ox et Oy , et le rapport des axes est

$$\frac{S'G'}{r'_0} : \frac{SG}{r_0};$$

on introduira donc une résistance dans le circuit du galvanomètre dont le trait lumineux est perpendiculaire au grand axe de l'ellipse, de manière à en réduire la déviation pour une orientation d'ailleurs quelconque du transmetteur, dans le rapport du petit au grand axe.

2° Le navire restant encore à un même cap, soit M , de coordonnées (x, y) , la position du point lumineux sur la glace dépolie (*fig. 39*). Introduisons dans la caisse du

Fig. 39.



transmetteur un aimant longitudinal; le point M se déplace et vient en M' en restant à la même distance de Ox , puisque le champ supplémentaire F' produit par l'aimant est parallèle à la ligne des contacts reliés au galvanomètre qui fournit l'image parallèle à Ox . Après avoir repéré le point M' , plaçons l'aimant transversalement et à la même

distance des bobines que ci-dessus; le point M vient en M''; on a

$$MM' = \frac{4NS'G'}{r'_0} F',$$

$$MM'' = \frac{4NSG}{r_0} F'.$$

Pour que la relation (5) soit vérifiée, il faut qu'on ait

$$MM' = MM''.$$

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$MM'' > MM';$$

laissant l'aimant dans la seconde position, on introduira des résistances dans le circuit du galvanomètre longitudinal de manière à ramener l'image qu'il fournit de M'' en M'_1 tel que

$$MM'_1 = MM' \quad (1).$$

3° Les deux méthodes précédentes nécessitent la collaboration et l'entente de deux opérateurs dont l'un est occupé au transmetteur, tandis que l'autre observe au récepteur, si l'on suppose, ce qui n'a rien de nécessaire, que les deux parties de l'appareil soient en deux endroits différents. Voici un troisième procédé qui porte uniquement sur le récepteur et qui, pour cette raison, pourrait être particulièrement commode, en particulier à bord des sous-marins, pour s'assurer de temps en temps que la relation (5) reste bien vérifiée.

Appelons g et r les résistances du galvanomètre et du circuit formé par la bobine qui lui est reliée et les fils de connexion, g' et r' les quantités analogues pour l'autre galvanomètre et l'autre circuit. Le navire étant à un certain

(1) L'emploi d'un barreau aimanté pour faire ce réglage m'a été suggéré par M. le commandant Guyou.

cap, nous avons pour le point M

$$x = \frac{4NS'G'}{r' + g'} F \cos \zeta,$$

$$y = \frac{4NSG}{r + g} F \sin \zeta.$$

Après avoir mesuré x et y avec une règle divisée, intervertissons les galvanomètres, ce qui se fait en intervertissant les connections des fils qui viennent du transmetteur. Nous aurons un nouveau point de coordonnées x' , y' :

$$x' = \frac{4NSG'}{r' + g'} F \sin \zeta,$$

$$y' = \frac{4NS'G}{r' + g} F \cos \zeta;$$

d'où

$$\frac{x}{y'} = \frac{G'}{G} \frac{r' + g}{r' + g'}, \quad \frac{y}{x'} = \frac{G}{G'} \frac{r' + g'}{r + g}.$$

Si l'on a

$$\frac{SG}{r + g} = \frac{S'G'}{r' + g'},$$

on doit avoir

$$\frac{x}{y'} = \frac{S}{S'} \frac{r' + g}{r + g}, \quad \frac{y}{x'} = \frac{S'}{S} \frac{r + g'}{r' + g'},$$

et si l'on a par exemple

$$\frac{SG}{r + g} > \frac{S'G'}{r' + g'},$$

on doit avoir

$$\frac{x}{y'} < \frac{S}{S'} \frac{r' + g}{r + g}, \quad \frac{y}{x'} > \frac{S'}{S} \frac{r + g'}{r' + g}.$$

Or le rapport $\frac{S}{S'}$ est tout à fait invariable et il peut être connu une fois pour toutes de bien des manières; on peut le considérer comme une caractéristique de l'appareil fournie par le constructeur. Il en est de même des résis-

tances r, r', g, g' qui ne varient pas plus que les résistances des boîtes de résistances qui servent aux mesures de laboratoire. Il est donc facile de voir si le nombre fourni par la mesure de $\frac{x}{y'}$ est plus petit ou plus grand que le nombre $\frac{S}{S'} \frac{r' + g'}{r + g}$. S'il est plus petit, il faut augmenter le rapport $\frac{x}{y'}$ ou diminuer $\frac{y}{x'}$; comme on ne peut que diminuer les déviations par l'emploi des résistances de réglage, il faudra donc diminuer y' , c'est-à-dire introduire dans le circuit du galvanomètre longitudinal, après avoir rétabli les connexions comme elles étaient d'abord, une résistance ρ telle que la déviation correspondante prenne une valeur y' donnée par la formule

$$y_1 = y' \frac{S'}{S} \frac{r + g'}{r' + g'}.$$

La relation (5) sera alors vérifiée, car on aura

$$y_1 = \frac{4NSG}{r + g + \rho} F \sin \zeta$$

et par suite

$$\frac{4NSG}{r + g + \rho} F \sin \zeta = \frac{4NSG'}{r + g'} F \sin \zeta \frac{S'}{S} \frac{r + g'}{r' + g'}$$

ou

$$\frac{SG}{r + g + \rho} = \frac{S'G'}{r' + g'}.$$

Ce procédé devra être employé quand le transmetteur sera d'un accès difficile, comme à bord des sous-marins par exemple. Il sera d'un emploi très rapide, surtout pour *vérifier* l'état du réglage; car il est bien facile de mesurer les rapports $\frac{x}{y'}$ et $\frac{y}{x'}$ et de les comparer aux constantes k_1, k_2 connues une fois pour toutes :

$$k_1 = \frac{S}{S'} \frac{r' + g'}{r + g}, \quad k_2 = \frac{S'}{S} \frac{r + g'}{r' + g'}.$$

Enfin il a l'avantage de fournir un contrôle du bon état de l'appareil, des contacts en particulier, car on doit avoir

$$\frac{x}{y'} \frac{y}{x'} = \frac{r' + g}{r' + g'} \frac{r + g'}{r + g}$$

ou, s'il y a des résistances ρ et ρ' intercalées dans les deux circuits,

$$\frac{xy}{x'y'} = \frac{(r' + g + \rho)(r + g' + \rho')}{(r' + g' + \rho')(r + g + \rho)},$$

que la relation (5) soit d'ailleurs vérifiée ou non.

Si les contacts restent bons et les résistances en bon état, le rapport $\frac{xy}{x'y'}$ doit donc rester constant quand bien même la relation (5) cesserait tout à fait d'être vérifiée par suite de la variation du rapport $\frac{G}{G'}$, seule quantité réellement variable avec le temps qui y figure. Si l'on constatait une variation dans le rapport $\frac{xy}{x'y'}$, il faudrait immédiatement passer en revue tous les contacts.

15. En résumé, la *compensation* de notre compas peut se faire par deux méthodes distinctes, possédant chacune leurs avantages et leurs inconvénients, mais l'une et l'autre beaucoup plus rapides que les méthodes jusqu'ici applicables aux compas, n'utilisant ni l'une ni l'autre aucune observation extérieure au navire, et pouvant être appliquées par conséquent aussi bien de nuit que de jour et quel que soit l'état du ciel.

Une fois compensé, le compas peut servir de *compas de route* ou de *compas de relèvement*, à la manière des compas déjà existants.

Enfin, la position d'équilibre des images lumineuses étant atteinte en moins d'une seconde, le point lumineux qu'on observe suit fidèlement, sans aucun retard, les *évolutions* du bâtiment.

CHAPITRE III.

RÉSULTATS OBTENUS.

16. Nous donnons ci-dessous les résultats d'expériences faites les unes à terre, les autres sur le cuirassé *Patrie* où nous avons obtenu l'autorisation de nous embarquer pour des essais préliminaires de notre appareil.

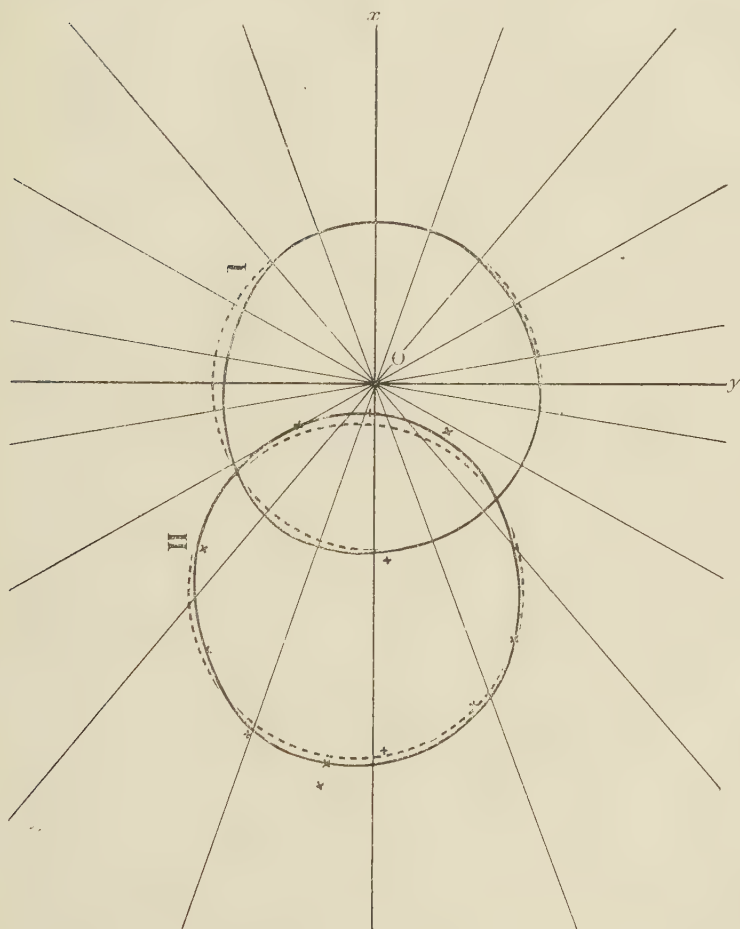
Les figures 40, 41, 42 se rapportent à des expériences faites à terre, qui permettent d'illustrer la décomposition des forces magnétiques agissant sur le compas analysée par le commandant Guyou. Le transmetteur était monté sur une plate-forme qu'on pouvait faire tourner de 10° en 10° ⁽¹⁾; il était d'abord placé dans un champ uniforme (c'est-à-dire indépendant de l'orientation de l'appareil), puis on introduisait des aimants parallèles soit à une paire de balais, soit à l'autre, puis des globes de fer doux étaient disposés sur les potences. L'ensemble des aimants et des fers doux équivalait, au point de vue magnétique, à un navire dont on essayait de compenser l'action perturbatrice au moyen de la seconde méthode qui a été indiquée (méthode de réglage sans correcteurs).

Dans la figure 40, Ox et Oy sont les positions de zéro des images lumineuses; la courbe I est le lieu géométrique de leur point de croisement quand le champ est uniforme et que la relation (5) est vérifiée (*voir* plus haut); elle coïncide presque exactement, comme on le voit, avec un certain cercle, de centre O; les petites irrégularités dans la forme (qui entraînent des erreurs angulaires absolument négligeables) proviennent de légères variations dans la vitesse du moteur, ou de changement de zéro des galvano-

(1) M. Carpentier a droit à mes remerciements bien sincères pour l'obligeance avec laquelle il a mis à ma disposition le matériel et l'assistance qui étaient nécessaires pour ces essais, faits dans ses ateliers.

mètres par suite de trépidations, chocs, etc. Quand on introduit des aimants, la courbe subit simplement une translation OO' et devient le cercle II.

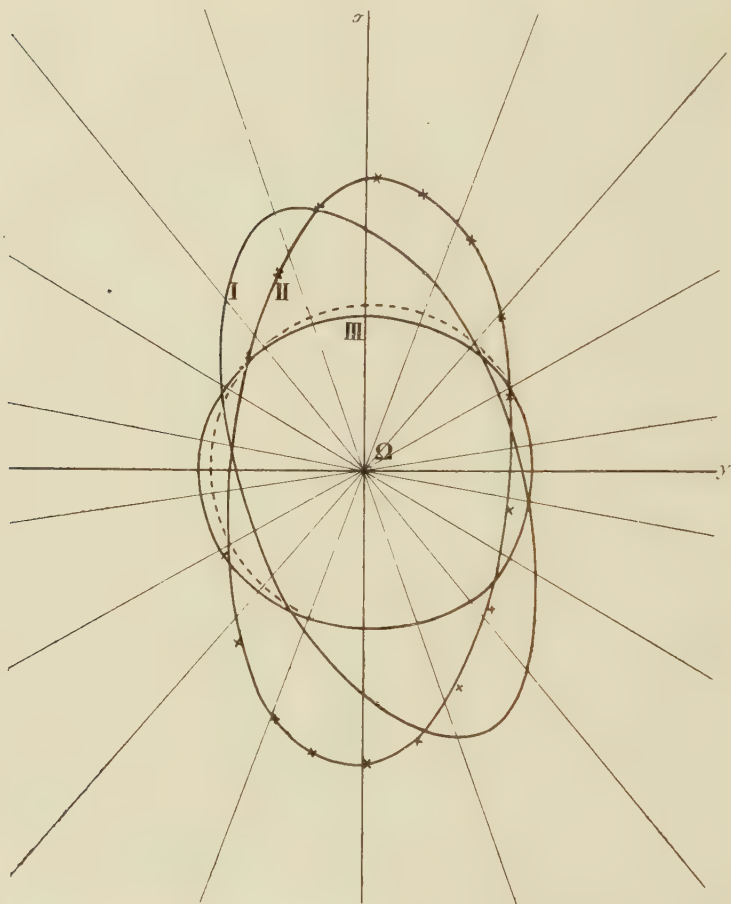
Fig. 40.



La courbe I (*fig. 41*) est le dygogramme du champ terrestre troublé par des sphères dissymétriquement placées

par rapport aux balais. On corrige cette dissymétrie en faisant tourner le boisseau du transmetteur de l'angle $-A$,

Fig. 41.



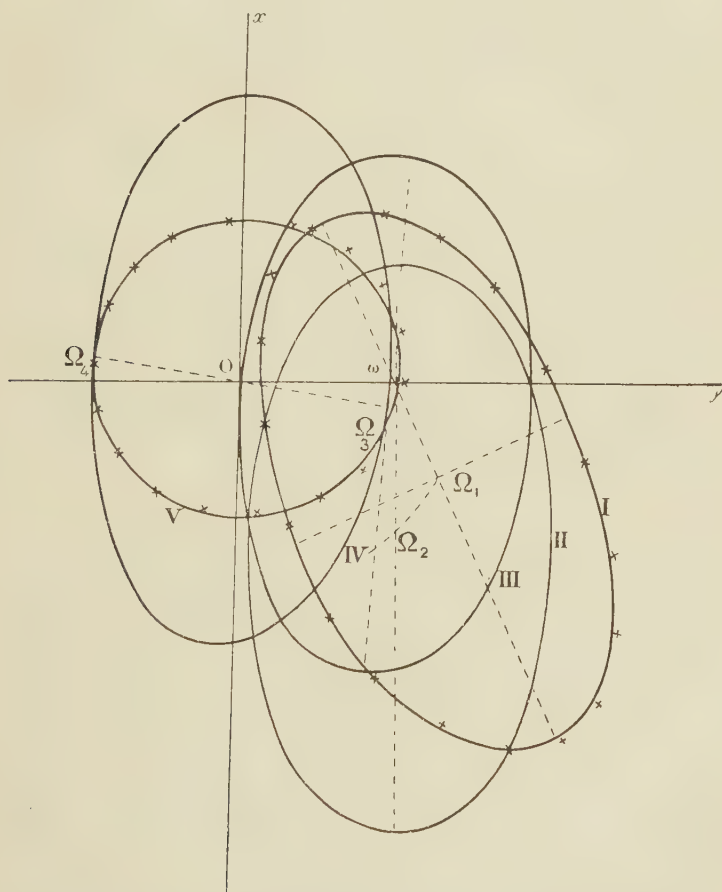
ce qui donne le dygogramme II; pour la courbe I on a

$$\frac{L - M}{L + M} = 0,34, \quad \delta_m = 20^\circ$$

et les *mêmes* valeurs pour la courbe II.

En introduisant dans le circuit du galvanomètre à image transversale une résistance convenable, on obtient la courbe III, identique à un cercle au degré d'approximation avec lequel les mesures *angulaires* doivent être faites.

Fig. 42.



La résistance intercalée et le décalage donné au système des balais compensent donc le système des deux sphères.

La figure 42 se rapporte à la compensation par cette

méthode d'un système de sphères et d'aimants placés d'une manière quelconque par rapport aux balais. Un premier tour d'horizon donne l'ellipse I; on a

$$\frac{L-M}{L+M} = \frac{36}{116} = 0,310, \quad \delta_m = 18^{\circ}, 0,$$

δ_m désignant, comme on l'a vu, la déviation maxima due aux *fers doux* seuls (dite *quadrantale*).

L'angle A est égal à -25° .

Le rapport $\frac{M}{L} = 0,52$.

On fait tourner le boisseau du transmetteur de 25° dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. On introduit dans le circuit du galvanomètre, dont l'axe est parallèle à Oy, une résistance telle que la distance de cette image à Oy, pour un certain cap d'ailleurs quelconque, soit réduite dans le rapport de 0,52 à 1. On construit le point Ω_2 en faisant tourner le point Ω_1 , centre de l'ellipse I, de 25° autour de O, dans le sens des aiguilles d'une montre; on en déduit le point Ω_1 , en prenant sur la parallèle à Ox menée par Ω_2

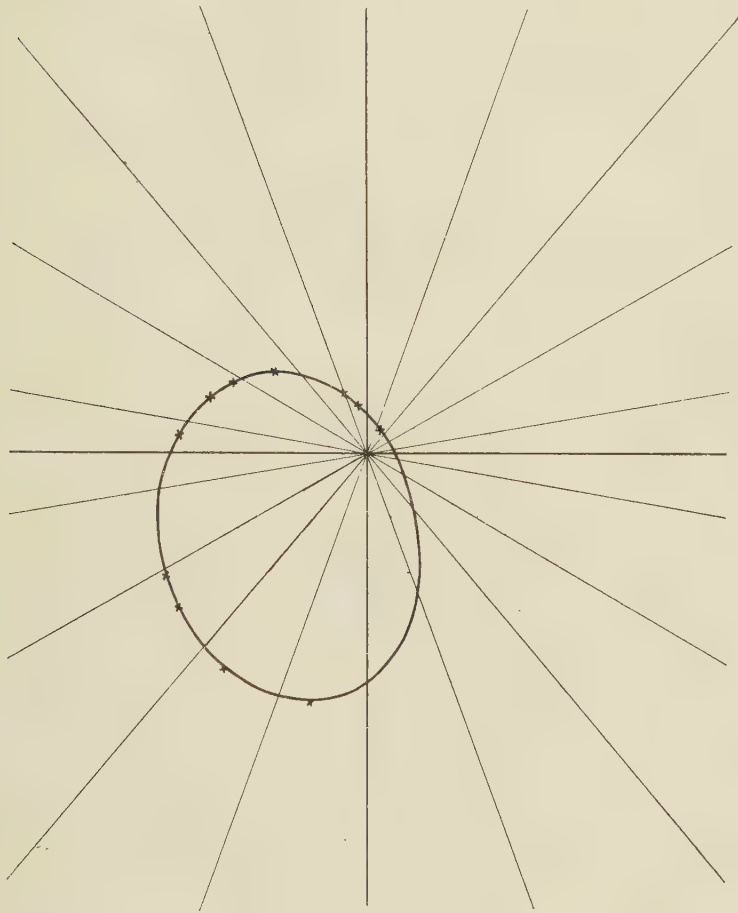
$$\omega \Omega_3 = 0,52. \omega \Omega_2,$$

puis on construit enfin le point Ω_4 symétrique de Ω_3 par rapport à O. On décale les positions de zéro des traits lumineux de manière qu'elles se coupent au point Ω_4 . Un tour d'horizon donne alors la courbe V, qui est bien un cercle centré sur la rose. Les courbes I, II, III, IV, V sont les courbes obtenues aux différentes phases du réglage, effectué dans un ordre un peu différent de celui qui a été indiqué dans le texte, lequel est plus rigoureux et plus rapide.

17. Figure 43 : dygogramme du champ en un point de la plate-forme sur laquelle est installé le compas étalon du cuirassé *Patrie*. Le point choisi est hors de l'axe du bâtiment.

D'ailleurs, la dissymétrie des fers doux constatée sur ce dygogramme, ainsi que sur ceux qui suivent, n'est pas la dissymétrie réelle, car dans ces expériences, faites rapi-

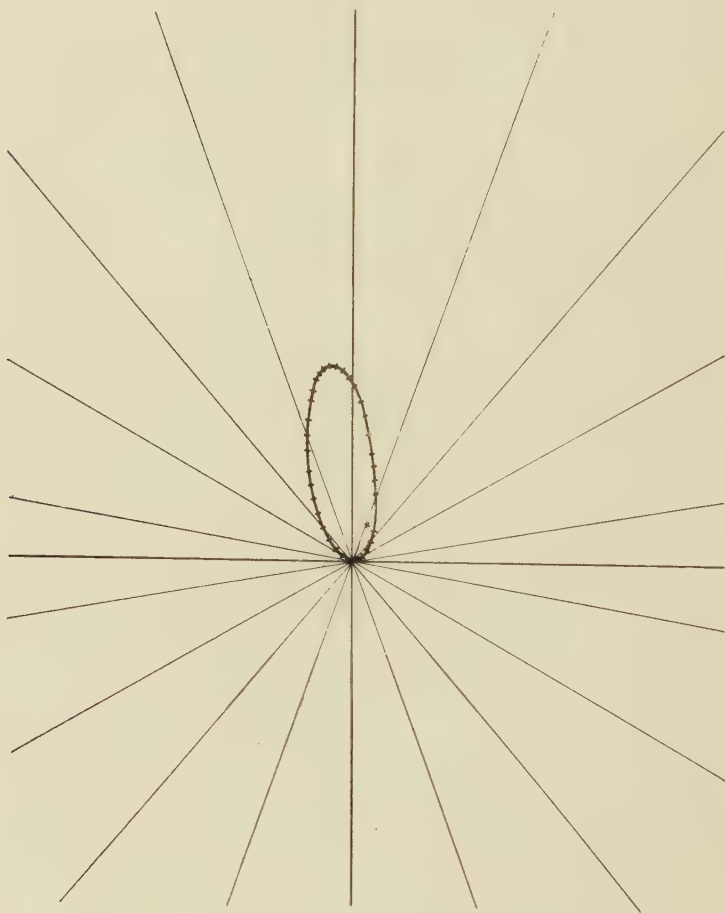
Fig. 43.



dement pour obtenir des indications sur le champ magnétique en divers endroits du bord, au point de vue de la grandeur des forces F_2 et F_3 , le transmetteur était placé

de manière qu'une des paires de contacts sur le collecteur fût sensiblement dans un plan parallèle au plan de symé-

Fig. 44.



trie longitudinal, mais sans qu'aucune précaution ait été prise pour réaliser rigoureusement cette condition.

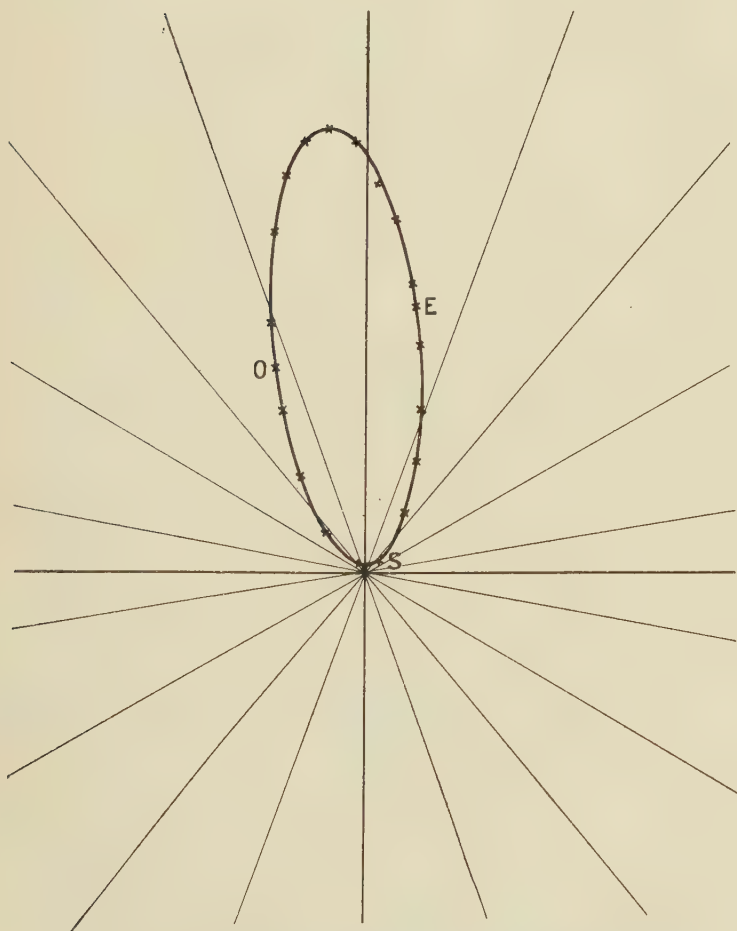
La déviation quadrantale sur cette plate-forme a été

trouvée égale à $7^{\circ}, 5$:

$$\sin \delta_m = \frac{44 - 33,7}{44 + 33,7} = 0,132,$$

$$\delta_m = 7^{\circ}, 5.$$

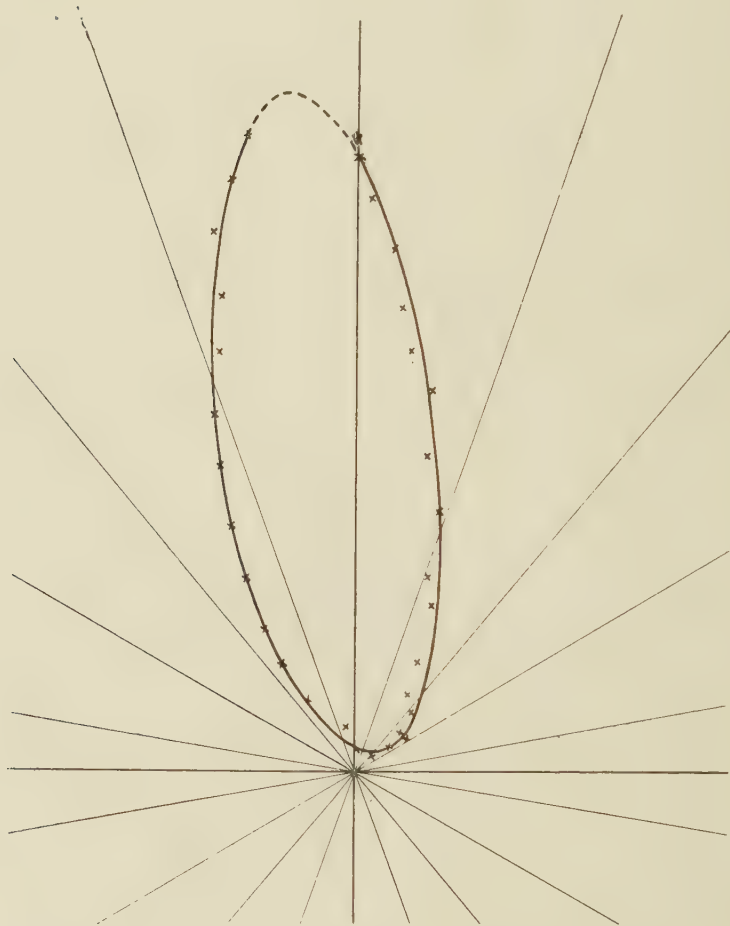
Fig. 45.



On voit bien sur ce dygogramme l'importance de la compensation, sans laquelle la force directrice serait tout à fait

insuffisante à certains caps pour assurer la position d'équilibre du compas d'une manière tout à fait précise. Ainsi,

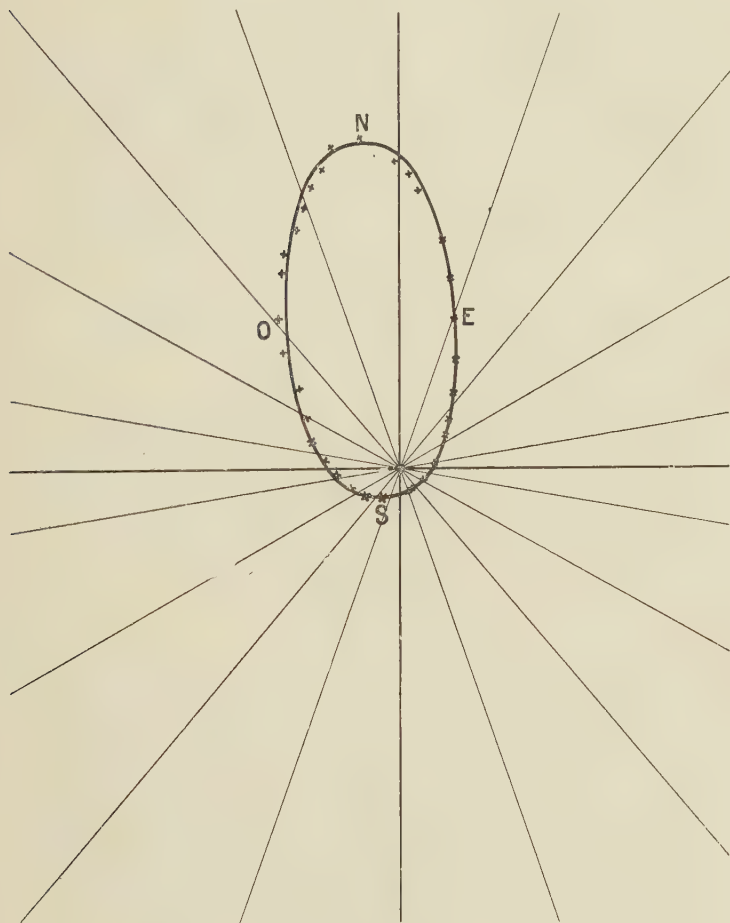
Fig. 46.



bien que la plate-forme du compas étalon soit l'endroit du bord le plus favorable pour installer un compas en temps de paix, on voit que, à certains caps, la force

directrice n'est que le $\frac{1}{10}$ de ce qu'elle est à d'autres caps ;
la position d'équilibre d'une rose magnétique serait donc

Fig. 47.



assurée beaucoup moins bien à certains caps qu'à d'autres,
si l'on ne compensait pas.

Figures 44, 45, 46 : dygogrammes de la cale à eau de
réserve obtenus avec des vitesses croissantes du moteur.

Ce sont des ellipses homothétiques. Toutes donnent la même déviation quadrantale maxima

$$\sin \delta_m = 0,5, \quad \delta_m = 30^\circ$$

à $0^\circ,5$ près. L'aimantation permanente (ou due à l'induction verticale des fers doux) est très grande; le centre de la rose étant à l'extérieur de l'ellipse, le champ magnétique ne fait pas un tour quand le navire fait un tour d'horizon; une rose magnétique placée en cet endroit ne prendrait que des positions comprises entre les tangentes menées à l'ellipse du point O.

La cale à eau est vers l'avant du navire, en dessous des deux ponts cuirassés; en cet endroit les parois de la cuirasse de ceinture sont assez voisines; aussi la déviation quadrantale est-elle grande.

Figure 47 : dygogramme du centre du poste central. Ce lieu est, comme la cale à eau, en dessous des deux ponts cuirassés, mais moins sur l'avant; les parois de la cuirasse sont plus éloignées; la déviation quadrantale maxima est plus faible :

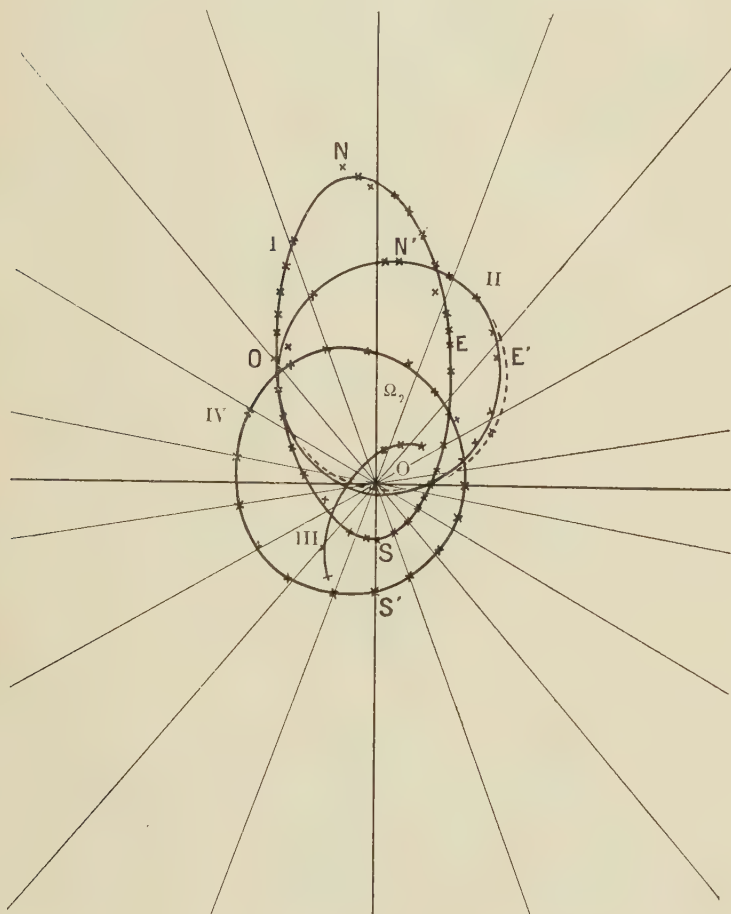
$$\delta_m = 20^\circ,5.$$

La figure 48 se rapporte encore au poste central, mais à l'emplacement du compas qui s'y trouve en temps ordinaire. On retrouve la même valeur de δ_m , comme on pouvait s'y attendre. D'après la Table du commandant Guyou, il faut deux sphères de 305^{mm} de diamètre dont les centres sont à 31^{cm} du centre des bobines tournantes pour compenser cette déviation quadrantale. Après les avoir placées ainsi, nous avons vérifié par un tour d'horizon que le dygogramme est bien devenu un cercle (courbe II).

Pour achever la compensation, il fallait alors placer des aimants faisant subir au point de croisement lumineux, pour un cap quelconque, la translation $\Omega_2 O$; c'est ce que nous avons fait; mais entre ce moment-là et celui où le dy-

gogramme II a été tracé, il a été procédé à des lancements de torpilles dont le poste est contigu au poste central; ces

Fig. 48.



torpilles, en acier, représentent des aimants permanents possédant, à cause de leur longueur, un grand moment magnétique; leur départ a modifié d'une manière considé-

nable la force F_2 due à l'aimantation permanente, et le nouveau dygogramme, dont on n'a pu tracer qu'un arc (III) faute d'un tour d'horizon complet, ne s'est nullement trouvé centré sur la rose. Après une nouvelle modification des aimants correcteurs, dont l'effet était rendu d'ailleurs incertain par ces variations de l'aimantation permanente, nous avons obtenu le dygogramme IV. Il est peu excentré; donc l'aimantation permanente était sensiblement compensée, et c'est un cercle égal au cercle II, sur lequel l'arc III pourrait parfaitement se placer par translation, ce qui montre bien que la position inattendue occupée par cet arc vient des modifications de l'aimantation dite *permanente* (indépendante du cap) et non d'un fonctionnement irrégulier de l'appareil.

La figure 49 représente le dygogramme obtenu en plaçant le transmetteur dans un couloir latéral, longeant les chaufferies tribord et conduisant à une soute. Cet endroit est au même étage que la cale à eau de réserve et plus voisin du centre du bâtiment que le poste central; on trouve en effet une déviation quadrantale maxima de 16° :

$$\sin \delta_m = \frac{38,1 - 21,7}{38,1 + 21,7} = 0,27,$$

$$\delta_m = 16^\circ.$$

La dissymétrie des fers doux est plus forte, comme on pouvait s'y attendre. L'aimantation permanente est faible.

Enfin, en plaçant le transmetteur au centre du blockhaus, nous avons obtenu le dygogramme 50, qui donne pour la déviation quadrantale maxima

$$\delta_m = 27^\circ.$$

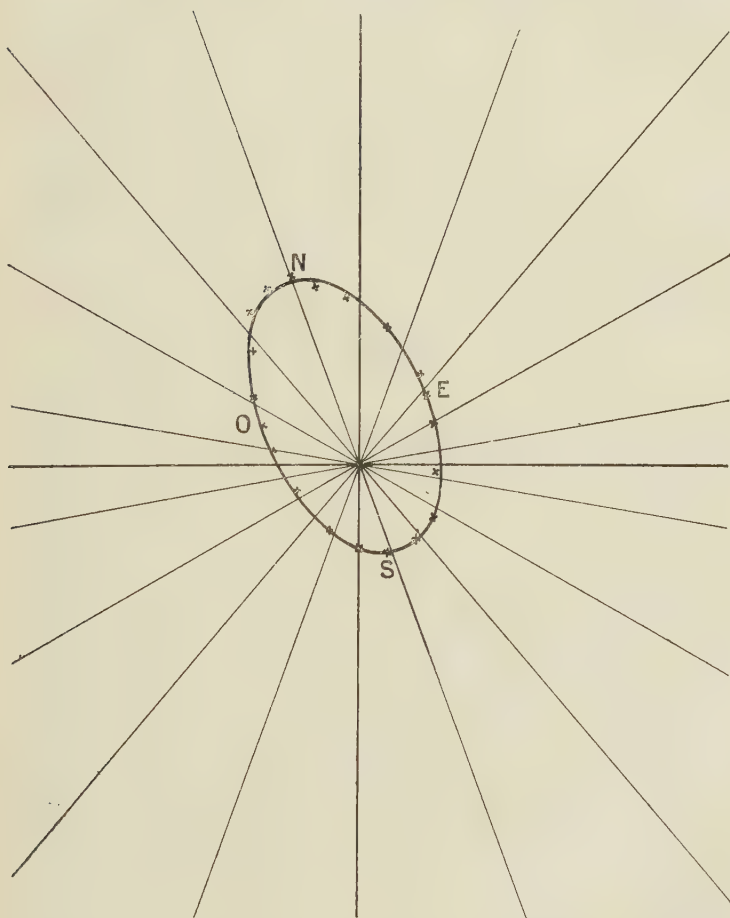
En même temps, l'aimantation permanente est forte. De plus, cette ellipse est très petite; cela montre que la force directrice moyenne est très faible. En effet, d'après les for-

mules (7), on a

$$F_1 = \frac{r_0}{8NSG} \frac{L+M}{2},$$

$$F_3 = \frac{r_0}{8NSG} \frac{L-M}{2}.$$

Fig. 49.



F_1 représente la force directrice vers le Nord; c'est aussi la force directrice moyenne caractérisant les qualités d'un

emplacement au point de vue de la grandeur de la force qui, à tous les caps, et une fois la compensation faite, dirigera un compas magnétique (de moment magnétique faible), qu'on y installera. A ce point de vue du reste, il faut introduire, non pas la force F_1 elle-même, mais son rapport à la composante horizontale H du champ terrestre; on désigne ce rapport par λ :

$$\lambda = \frac{F_1}{H},$$

et la valeur de λ est d'une importance primordiale pour définir les qualités magnétiques d'un emplacement destiné à un compas magnétique, pour lequel on doit rechercher la plus grande force directrice possible.

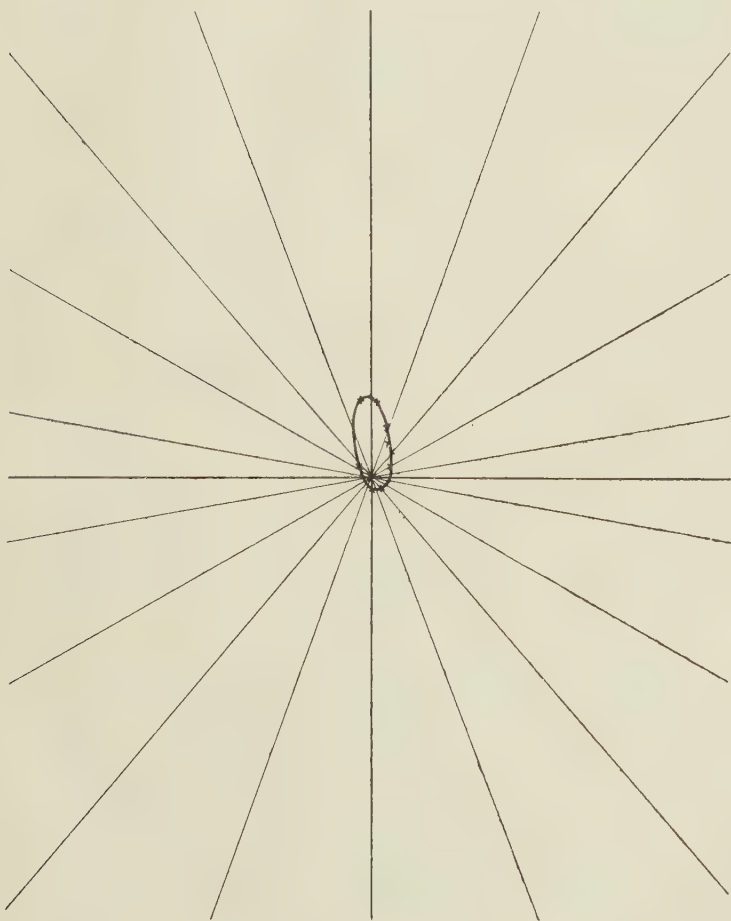
On aura donc

$$\lambda = \frac{r_0}{8NSGH} \frac{1}{H} \frac{L+M}{2}.$$

Si, dans nos expériences, la vitesse du moteur avait été maintenue rigoureusement constante, du tracé d'un dygogramme à un autre, nous pourrions sur ces tracés relever les valeurs de la quantité $\frac{8NSGH}{r_0} \lambda$ et par conséquent comparer les valeurs relatives de λ aux divers points du bord. Mais cela ne nous a pas été possible (à cause des variations de voltage du bord et de la disposition du rhéostat de réglage que nous avons à notre usage) avec une précision suffisante pour faire cette comparaison; à défaut de cette régularité dans la vitesse, un compteur de tours nous aurait permis la comparaison des valeurs de $N\lambda$, et par suite de λ ; mais nous n'avons aucun compteur à notre disposition et le temps a fait défaut pour y suppléer. Toutefois il est clair que la valeur de $\frac{L+M}{2}$ est considérablement plus petite pour le blockhaus que pour les autres points expérimentés; la force directrice moyenne

vers le Nord y est donc environ $\frac{8,5}{35} = \frac{1}{4}$ de ce qu'elle est dans le poste central; comme la force directrice en ce

Fig. 50.



lieu est déjà à peine suffisante pour bien assurer la position d'équilibre du compas Thomson, il est évident qu'un

compas de ce genre, placé dans le blockhaus, serait absolument insensible.

Au point de vue de la mesure si importante de λ , on voit que l'addition d'un compteur de tour à notre appareil sera un utile perfectionnement.

18. De cet exposé des résultats obtenus en quelques jours sur la *Patrie*, résultats que nous ne pouvons d'ailleurs utiliser complètement, on vient de le voir, faute d'avoir pu mesurer la vitesse de rotation des bobines, on peut conclure qu'il est possible, avec le compas électromagnétique, de faire en très peu de temps l'étude aussi complète que possible du champ magnétique d'un navire. Nous avons mis également en évidence ce fait qu'en dessous des deux ponts cuirassés *la déviation maxima due aux fers doux* (quadrantale) *va en augmentant quand on se déplace du centre du navire vers l'avant; la force due à l'aimantation permanente et à l'induction dans les fers doux verticaux* (déviations semi-circulaires) *augmente aussi constamment*; elle est dirigée (du moins sur la *Patrie*) vers l'avant. Si l'on remarque qu'en même temps les deux parois de la cuirasse se rapprochent de plus en plus, il semble qu'il faille en conclure que les parties principales, de beaucoup, des forces F_2 et F_3 proviennent de la ceinture cuirassée.

Toutefois, des masses magnétiques telles que des torpilles placées dans le voisinage du compas peuvent modifier notablement la force F_2 et produire de brusques perturbations sur un compas qu'on croit compensé. C'est ce que nous avons montré pour le compas du poste central. Dans le cas où il est impossible d'éviter que des masses perturbatrices de ce genre soient dans le voisinage du compas, on voit combien il est nécessaire d'avoir un moyen rapide et commode de vérifier et de rectifier la compensation. Nous pensons avoir montré que notre appareil fournit ce moyen.

Faisons remarquer toutefois que, au moins en ce qui concerne l'aimantation permanente, ces résultats peuvent être spéciaux à la *Patrie*, car on a démontré que la grandeur et la direction du vecteur F_2 dépendent dans une large mesure de l'orientation du navire sur les chantiers de construction.

NOTE I.

SUR LES EXPÉRIENCES DE DÉVIATION D'UN COMPAS PAR DES CORRECTEURS DE FER DOUX DANS UN CHAMP UNIFORME.

(II^e Partie, Chap. II, § 23.)

Le calcul de la déviation maxima δ_m produite par ces correcteurs sur le compas est soumis à la condition

$$\varphi_4 < 2\varphi_1.$$

Il est bien évident, en effet, qu'il doit exister une condition de cette nature, car, si l'on suppose que le moment magnétique du compas augmente de plus en plus, il est clair que le compas finira par être complètement entraîné par les correcteurs en oscillant simplement autour de la direction qui joint son centre aux centres des compensateurs.

Mais, dans l'emploi d'un compas, il n'y a pas à se préoccuper de cette condition. On doit avoir en effet, d'après la relation (19) (§ 26),

$$\sin \beta - \sin \delta'_m < 1$$

ou

$$-\sin \delta'_m < 1 - \sin \beta.$$

La variation maxima de l'angle β correspondant aux correcteurs en usage (sphères de 305^{mm} de diamètre) est 20°; l'inégalité précédente donne alors

$$|\delta'_m| < 41^\circ,$$

condition qui est toujours remplie dans la pratique. L'angle δ_m

satisfaisant à la relation

$$\sin(\beta + \delta_m) = \sin \beta - \sin \delta'_m$$

existe donc alors; or l'équation (13) (§ 23) peut s'écrire

$$\sin(\beta + \delta_m) + \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} = 0$$

et l'on a

$$\varphi_2 < 2\varphi_1.$$

NOTE II.

INFLUENCE DE L'INDUCTION MUTUELLE DES DEUX CIRCUITS DANS LE COMPAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

1. Comme on le démontre au § 3 (III^e Partie, Chap. I), l'influence de la self-induction de chaque circuit sur la quantité d'électricité induite à chaque demi-tour serait tout à fait négligeable, pour le problème qui nous occupe, si chaque circuit tournait seul. Mais l'induction mutuelle des deux circuits peut produire une perturbation plus importante.

Soient M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits, et i' le courant qui circule dans la deuxième bobine. Il faut ajouter à la quantité d'électricité qui serait induite par demi-tour dans le premier circuit, s'il tournait seul, la quantité

$$-\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{M}{r_0} \frac{di'}{dt} dt = \frac{M}{r_0} \left(i'_0 - i'_{\frac{\pi}{\omega}} \right),$$

en supposant que la largeur des touches est négligeable et que, par suite, la résistance totale est r_0 pendant la durée d'une demi-révolution complète.

Pour le calcul de ce terme de correction, nous pouvons supposer qu'aux instants 0 et $\frac{\pi}{\omega}$ la période d'établissement du courant dans le deuxième circuit est dépassée; on peut alors représenter i' par la formule

$$i' = \frac{FS'\omega}{r_0'^2 + L'^2\omega^2} [\omega L' \sin(\omega t + \zeta) + r_0' \cos(\omega t + \zeta)]$$

et le terme correctif devient

$$\frac{2 \text{MFS}' \omega}{r_0 (r_0'^2 + L'^2 \omega^2)} (\omega L' \sin \zeta + r_0' \cos \zeta).$$

Les déviations de nos deux galvanomètres sont donc

$$\begin{cases} x = \frac{4 \text{NS}' \text{FG}'}{r_0'} \cos \zeta + \frac{8 \pi \text{N}^2 \text{MFSG}'}{r_0'^2 + 4 \pi^2 \text{N}^2 L'^2} (2 \pi \text{NL} \cos \zeta - r_0 \sin \zeta), \\ y = \frac{4 \text{NSFG}}{r_0} \sin \zeta + \frac{8 \pi \text{N}^2 \text{MFS}' \text{G}}{r_0'^2 + 4 \pi^2 \text{N}^2 L'^2} (2 \pi \text{NL}' \sin \zeta + r_0' \cos \zeta), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} x &= \text{A}' \cos (\zeta + \alpha'), \\ y &= \text{A} \sin (\zeta + \alpha). \end{aligned}$$

Pour que notre appareil fournisse une représentation simple du champ magnétique uniforme au milieu duquel tournent les bobines, il faut d'abord que l'on ait

$$\text{A} = \text{A}', \quad \alpha = \alpha'.$$

Dans ces conditions l'angle du vecteur OM, sur la glace dépolie, avec l'axe Ox ne différera du cap ζ que par un angle constant (pour une vitesse donnée), et il sera possible, théoriquement, de tenir compte de cette erreur constante. Mais ce qu'il faut, en réalité, c'est que les termes dus à l'induction mutuelle soient négligeables, ce qui rendra négligeables aussi α et α' . Il n'y a pas d'autre moyen d'atteindre ce but que de rendre très petit le coefficient M. Pour cela, au lieu d'employer deux enroulements coaxiaux, comme cela a été fait à tort dans l'appareil construit, il suffira d'employer deux bobines superposées, tangentes le long d'une génératrice ou, mieux encore, superposées et rectangulaires, en mettant cette fois les 4 balais dans le même plan; il est clair que le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines sera beaucoup plus petit (15 à 20 fois au moins).

2. Même avec la disposition défectueuse de l'appareil construit, l'influence de l'induction mutuelle reste faible et n'empêche pas une application au moins approchée des formules simples; seulement elle entraîne une erreur constante, pour une vitesse donnée, sur la valeur vraie du cap. Rendons-nous compte des ordres de grandeur. Les deux circuits sont sensiblement identiques avec une résistance totale de 400 ohms, et un coefficient de self-induction 0,44 henry. La vitesse angulaire ne dépasse pas 20 tours par seconde, soit $\omega = 2 \pi 20 = 126$. La valeur de ωL est donc à peu

près le quart de celle de r_0 . Dans le terme correctif, nous négligeons donc ωL devant r_0 et nous aurons

$$x = \frac{4NS'FG'}{r_0'} \cos \zeta - \frac{8\pi N^2 MFSG'}{r_0 r_0'} \sin \zeta,$$

$$y = \frac{4NSFG}{r_0} \sin \zeta + \frac{8\pi N^2 MFS'G}{r_0 r_0'} \cos \zeta.$$

On a alors

$$A = \frac{4NSFG}{r_0} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 N^2 M^2 S'^2}{S^2 r_0'^2}},$$

$$A' = \frac{4NS'FG'}{r_0'} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 N^2 M^2 S^2}{S'^2 r_0^2}},$$

$$\tan \alpha = \frac{2\pi NMS'}{Sr_0'}, \quad \tan \alpha' = \frac{2\pi NMS}{S'r_0}.$$

Nous avons vérifié expérimentalement que les coefficients de sensibilité G et G' des deux galvanomètres sont presque rigoureusement égaux; quand on règle les résistances r_0 et r_0' de façon que $A = A'$, on a donc sensiblement aussi

$$\frac{S}{r_0} = \frac{S'}{r_0'}$$

et, par suite,

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'} = \frac{S}{S'}.$$

Comme S et S' sont par construction très peu différentes, on a sensiblement $\alpha = \alpha'$.

Pour une vitesse donnée, l'angle du vecteur OM et de l'axe Ox est donc égal au cap magnétique à un angle près indépendant du cap.

Cette erreur constante est d'ailleurs petite pour les vitesses comprises entre 8 ou 20 tours par seconde; on en aura une limite supérieure en donnant à M la valeur du coefficient de self-induction d'une des bobines, soit 0^b,44; on a alors, pour $N = 20$,

$$\tan \alpha = \frac{126.0,44}{400} = \frac{55,5}{400} = 0,14,$$

$$\alpha = 8^\circ.$$

En fait l'expérience indique des valeurs qui ne dépassent pas 4° pour les plus grandes vitesses. Quand la vitesse varie peu, comme cela avait lieu dans nos expériences à bord de la *Patrie*, α varie peu; cet angle α ne nous gênait donc nullement pour l'étude du champ magnétique du bord, puisqu'il avait pour effet de faire tourner

les dygogrammes d'un angle constant sans changer leur forme.

Ce qui met le mieux en évidence l'influence de l'induction mutuelle des bobines, c'est de faire augmenter la vitesse en laissant le cap constant; si M était nul, le point (x, y) décrirait une droite passant par l'origine, d'angle polaire ζ . En réalité, on obtient une ligne courbe; et, en effet, les coordonnées du point de croisement des traits lumineux, en fonctions du nombre de tours N , ont pour expressions

$$x = a'N + b'N^2,$$

$$y = aN + bN^2.$$

Ce point décrit donc une conique passant par l'origine.

Dans toute l'étendue de la glace dépolie, la courbure de cet arc de conique est faible. Elle s'accroît notablement quand on dispose au centre des deux bobines un même noyau de fer, qui augmente beaucoup leur coefficient d'induction mutuelle.

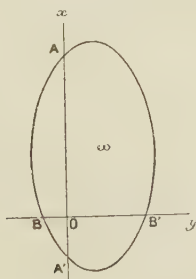
Avec des bobines superposées le long d'une génératrice, la cause d'erreur que nous discutons ici deviendra négligeable; si M devient 20 fois plus petit, la valeur maxima de α , pour une vitesse de 20 tours par seconde, sera de $0^{\circ}, 2$. Cette vitesse de 20 tours par seconde est d'ailleurs un maximum qu'il paraît désirable d'éviter pour la qualité des contacts sur le collecteur.

NOTE III.

PLACEMENT DE LA BARRE DE FLINDERS AVEC LE COMPAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Supposons qu'en un lieu du globe on fasse un tour d'horizon et qu'on suive au crayon le chemin décrit par le point de croisement

Eig. 51.



des traits lumineux; on obtient le dygogramme C (fig. 51), de

centre Ω . Les coordonnées x, y du centre sont

$$x = k\lambda \oplus H = k(P + cZ),$$

$$y = k\lambda \ominus H = k(Q + fZ)$$

avec les notations habituelles, k étant le facteur de proportionnalité des déviations des galvanomètres (supposés réglés de manière que $\frac{SG}{r_0} = \frac{S'G'}{r'_0}$) aux champs magnétiques au centre du transmetteur.

Si l'on suppose que le navire se déplace en latitude et que P et Q restent constants, Z varie et les formules précédentes montrent que le point (x, y) décrit une droite.

Si l'on fait en un certain nombre de lieux suffisamment éloignés en latitude des tours d'horizon ou des fractions de tour d'horizon suffisants pour pouvoir déterminer chaque fois le centre Ω , il sera aisé de construire cette droite. Cette droite connue, deux points pris sur elle permettront de déterminer kP , kQ , kc et kf . Des expériences faites à terre sur différentes longueurs de barre de Flinders permettront de placer à coup sûr sur l'avant (ou sur l'arrière) du transmetteur, et par le travers (à tribord ou à bâbord), deux barres de Flinders produisant des coefficients c et f annulant les précédents. On réglera ensuite les aimants comme il a été dit.

Actuellement le réglage de la barre de Flinders ne se fait que pour le compas étalon placé dans l'axe du navire; et alors f est nul, ce qui conduit à l'emploi d'une seule barre de Flinders. Mais, au combat, ce compas étalon placé sur une passerelle élevée serait infailliblement détruit. Notre transmetteur, au contraire, est destiné, comme nous l'avons vu, à être placé dans les fonds du navire. Il n'est nullement assuré alors que f soit nul. Mais, comme on vient de le voir, les renseignements nécessaires pour le placement des deux barres de Flinders seront recueillis aussi facilement que pour une seule. Si $f = 0$, le lieu de Ω est une parallèle à Ox .

Vu et approuvé :

Paris, le 16 décembre 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 décembre 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.



TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS.....	2
-------------------	---

PREMIÈRE PARTIE.

I. <i>Historique.</i> — 1. Les compas de marine jusqu'au compas Thomson. — 2. Le compas Thomson et la compensation. — 3. Les compas liquides.....	5
II. <i>Emploi des compas.</i> — 4. L'emploi des compas montre que la compensation est nécessaire. — 5. Description sommaire. — 6. Compas de route. — 7. Compas de relèvement. — 8. Évolutions. — 9. Observations magnétiques en mer.....	7
III. <i>Principes de la compensation.</i> — 10. Formation des équations de Poisson; fers doux et fers durs. — 11. La compensation est possible; elle est liée à la constance du champ quand le cap varie. — 12. Analyse du champ directeur; théorème de M. E. Gouy. — 13. Plan de symétrie apparente des fers doux. — 14. Correcteurs : 1 ^o placement des sphères compensatrices; puissance compensatrice; 2 ^o placement des aimants correcteurs et de la barre de Flinders. — 15. Détermination des coefficients λ , $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. — 16. Inconvénients de la méthode des relèvements. Conditions pratiques de compensation. — 17. Principe de la compensation à l'aide du défecteur. — 18. Description sommaire du défecteur. — 19. Son emploi est soumis aux conditions $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{E} = 0$. — 20. Pratique de la compensation; dygogramme. — 21. Inconvénients.....	11
IV. <i>Difficultés spéciales aux blockhaus cuirassés et aux sous-marins.</i> — 22. Blockhaus. Le champ directeur est extrêmement faible, les parois du blockhaus formant écran magnétique. Essais de transmission; essais de compas liquides; essais de boussoles gyroscopiques. — 23. Sous-marins. — 24. Résumé de la première Partie.....	37

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DU FONCTIONNEMENT ET DE LA COMPENSATION
DES COMPAS LIQUIDES.I. *L'entraînement des compas liquides pendant les évolutions.*

— 1. Conditions de stabilité d'un compas. — 2. Utilité apparente d'un grand moment magnétique pour les compas sous cuirasse. — 3. Compas liquides. — 4. Ils doivent être entraînés par le liquide et réagir sur les correcteurs en fers doux. — 5. Dispositif expérimental pour l'étude de l'entraînement. — 6. Compas examinés. — 7. Sur quoi doivent porter les déterminations. — 8. Mesure de H . — 9. Mesure des déviations δ . — 10. Examen des courbes de déviation en fonction de la vitesse angulaire. — 11. Remarques sur le dispositif employé. — 12. Entraînement initial. — 13. Résultats d'ensemble. — 14. Déviations caractéristiques de chaque type de compas. — 15. Courbes de retour à l'équilibre. — 16. Conclusion. Les compas liquides paraissent devoir donner des indications peu précises dans les champs magnétiques faibles. 41

II. *La compensation des compas de grand moment magnétique.* — 1. L'induction développée dans les correcteurs de fer doux par le compas oblige à compléter la théorie. — 2. Expression du couple directeur en fonction du potentiel magnétique.

A. 3. Développement du potentiel dû au magnétisme induit dans une sphère de fer doux creuse en fonctions sphériques. — 4. Calcul du couple directeur correspondant. Son développement suivant les puissances de $\frac{l}{b}$ ($2l$ longueur des aimants, b distance du centre du compas au centre de la sphère). — 5. Application de la formule à l'expérience. — 6. Calcul complet des deux premiers termes. — 7. Interprétation géométrique. Théorème. — 8. Emploi de deux sphères. — 9. Le second terme est négligeable devant le premier.

B. 10. Développement en fonctions sphériques du potentiel dû au magnétisme induit dans une sphère de fer doux creuse par le champ terrestre. — 11. Calcul du couple correspondant. — 12. Le premier terme du développement de ce couple suivant les puissances croissantes de $\frac{l}{b}$. Son interprétation. Théorème de M. E. Guyou.

C. 13. Vérifications expérimentales. — 14. Disposition de l'appareil. — 15-16. Réglage. — 17. Résultats expérimentaux. — 18. Équation d'équilibre du compas. — 19. Résolution graphique. — 20. Calcul de φ_1, φ_3 ; mesure de $\frac{M}{H}$; calcul de φ_4 . — 21. Courbes de déviations théoriques. — 22. Leur comparaison

avec les courbes expérimentales. — 23. Calcul de la puissance compensatrice d'une paire de globes pour une valeur donnée de $\frac{M}{H}$. Comparaison avec l'expérience.

D. 24. Principe de la compensation d'un compas qui produit sur les correcteurs de fer doux une aimantation non négligeable devant celle qu'y produit le champ terrestre. — 25. La compensation égalise la force directrice à tous les caps. — 26. Construction d'une Table de compensation. — 27. Calcul des erreurs qui accompagnent un changement en latitude magnétique. — 28. Application numérique. — 29. Dangers du déplacement fréquent des correcteurs que nécessite le maintien de la compensation. — 30. Avantages théoriques des compensateurs de grandes dimensions. 69

TROISIÈME PARTIE.

COMPAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

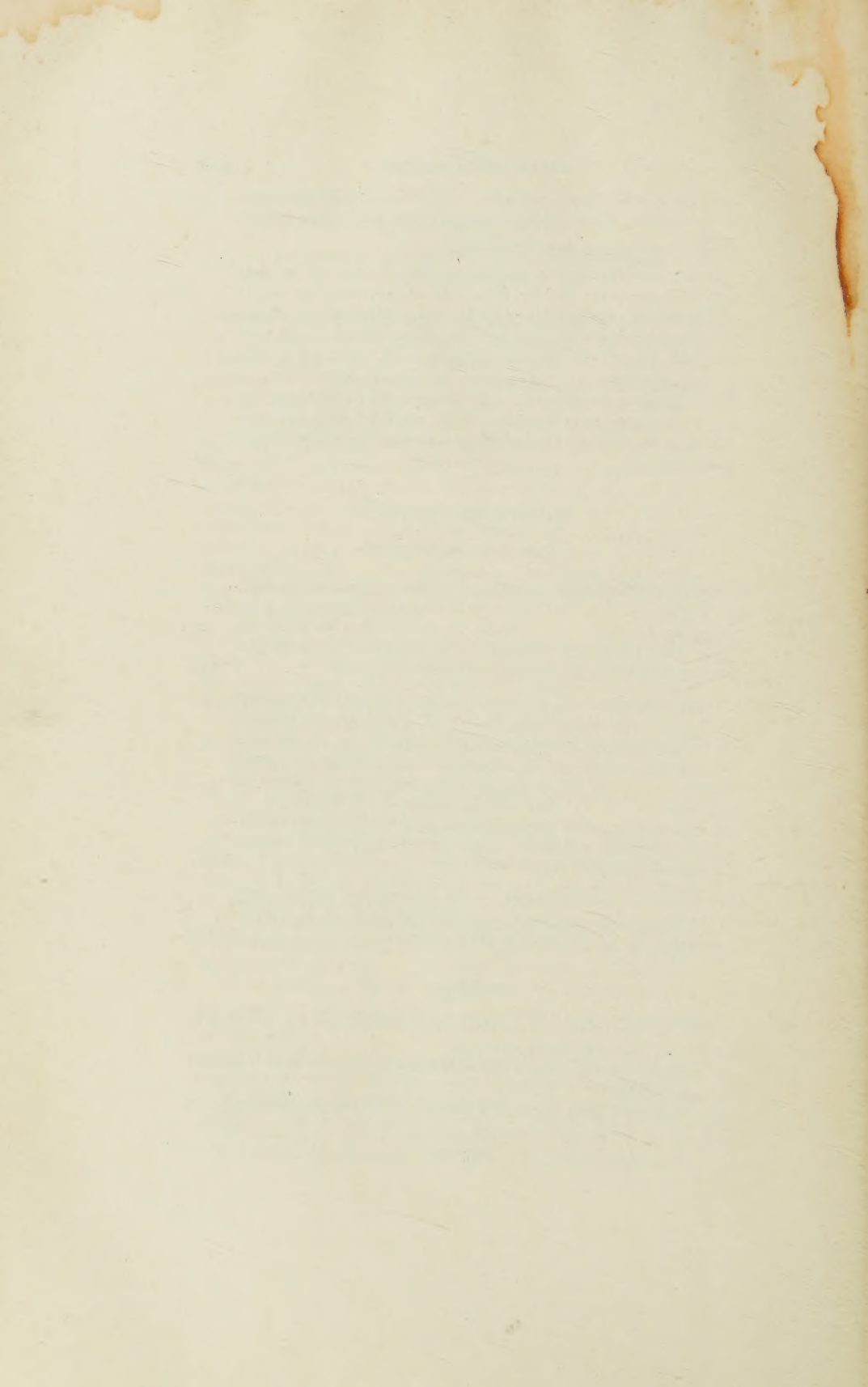
- I. *Compas électromagnétique*. — 1. Principe du transmetteur. — 2. Théorie. — 3. Discussion de la formule simple. — 4. Principe du récepteur. — 5. Détails de construction du transmetteur. — 6. Détails de construction du récepteur. — 7. Emplacements à donner au transmetteur et au récepteur. 145
- II. *Compensation*. — 8. Tracé du dygogramme par le récepteur. — 9. Placement des correcteurs. — 10. Rapidité de cette méthode de compensation et avantages qu'elle comporte. — 11. Méthode de réglage permettant de supprimer les correcteurs magnétiques. — 12. Détails de construction facilitant la lecture du cap corrigé. — 13. Méthode géométrique de correction. — 14. Les méthodes de réglage magnétique et électrique nécessitent un réglage préalable; manières de procéder à ce réglage. — 15. Résumé. 162
- III. *Résultats expérimentaux*. — 16. Expériences faites à terre. — 17. Expériences faites sur le cuirassé *Patrie*. — 18. Remarques générales sur les résultats de ces expériences. 180

NOTES.

I. Sur les expériences de déviation d'un compas par des correcteurs de fer doux dans un champ uniforme.

II. Influence de l'induction mutuelle des deux circuits dans le compas électromagnétique.

III. Placement de la barre de Flinders avec le compas électromagnétique.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Caractères généraux du polymorphisme.

Vu et approuvé :

Paris, le 16 décembre 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 décembre 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

